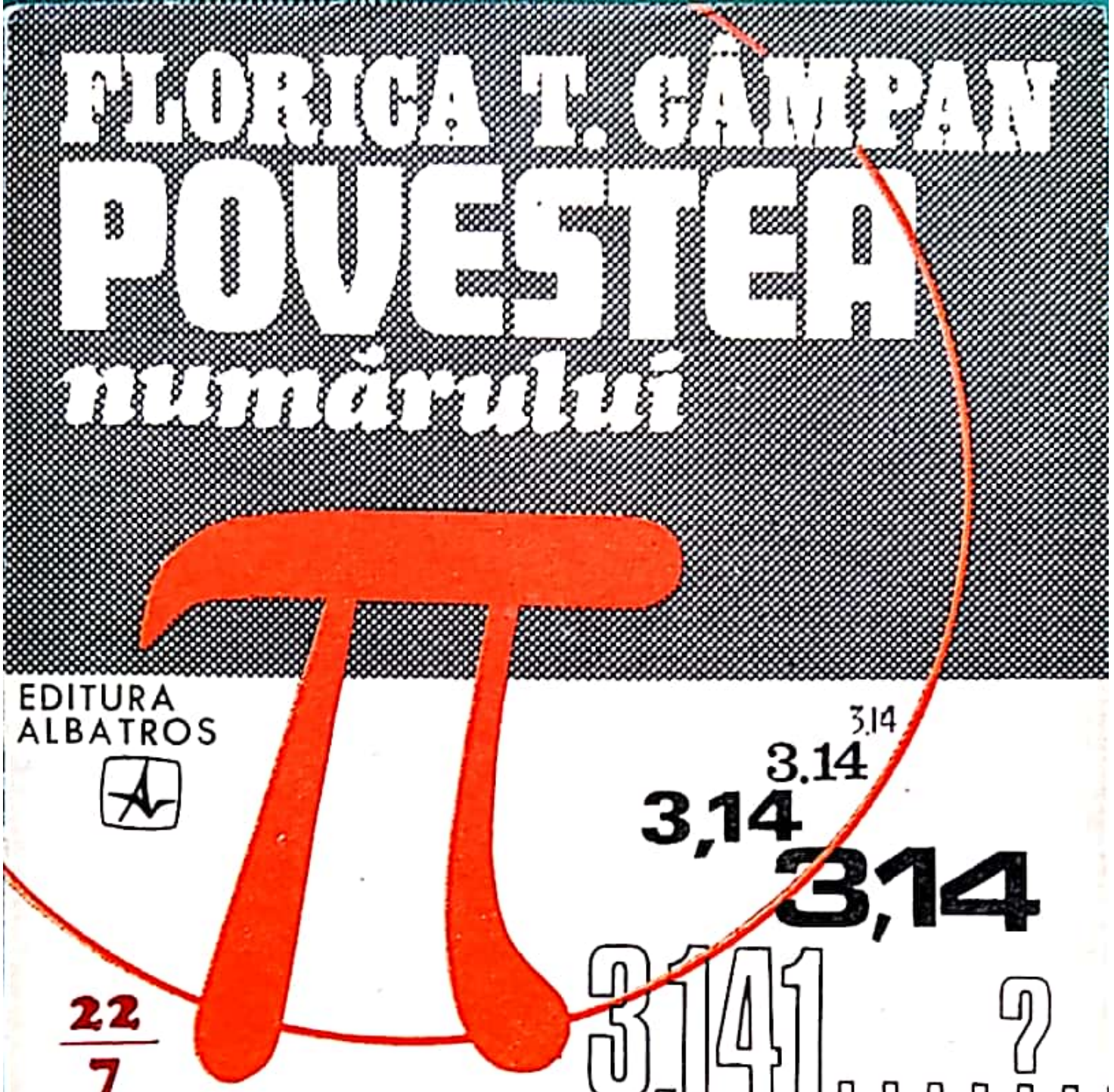
FLORICA T. CÂMPAN

POVESTEA numărului



EDITURA ALBATROS

3,14

3.14

3,14

3,14

3,141.....?

22/7

3,14

3,14

3.14159265358979

3,14

3,14

3,14

3,14

3,14

3,14....

3.14

FLORICA T. CÂMPAN

POVESTEA NUMĂRULUI II

Referent :
Acad. OCTAV ONICESCU

FLORICA T. CÂMPAN

profesor doctor docent

POVESTEA NUMĂRULUI π

(Ediția a II-a
revăzută și adăugită)

EDITURA ALBATROS
1977

Lector : FOLESCU GHEORGHE
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar 28.III.1977. Apărut 1977. Comanda nr. 1082. Tiraj : 37.000 broşate. Coli de tipar : 16,5.

Tiparul executat sub comanda nr. 449 la Intreprinderea poligrafică Iaşi, str. Vasile Alecsandri 6 IAŞI
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Dedic această carte
soțului, prietenului și călăuzei mele,

TEODOR I. CÂMPAN

„... nu sînt un specialist în matematici, ci numai un admirator, un nefericit îndrăgostit de cea mai frumoasă dintre ştiinţe ...“

Paul Valéry

Răsfoind această carte, presărată cu formule şi figuri geometrice, m-ai putea întreba, dragă cititorule, de ce am intitulat-o *povestea* şi nu *istoria* numărului π şi ai putea continua, cu oarecare maliţiozitate în glas de ce n-am numit-o: *romanul de aventuri* ori *poemul numărului* π ?

Ei bine, dacă ai face-o, cred că, după ce vei citi cartea, tu însuţi ai admite că şi titlurile propuse de tine s-ar fi potrivit. Primul, fiindcă aidoma unui personaj dintr-un roman de aventuri, acest număr π a adunat în jurul lui nenumăraţi matematicieni şi alţi gînditori de seamă, înlănţuindu-i printr-o pasiune care nu a durat numai o viaţă de om, ci peste trei milenii; al doilea, fiindcă urmărind dezvoltarea temei, te cuprinde un fel de vrajă ca şi atunci cînd asculţi un poem simfonic. Ai, parcă, impresia că toate gîndurile celor ce s-au străduit să cerceteze problemele legate de natura numărului π se caută în timp şi spaţiu şi se adună laolaltă, după aceleaşi legi ale armoniei şi ale ritmului ca şi sunetele unei melodii. Am ales însă cuvîntul *poveste* fiindcă mi-a părut că el poate să-ţi arate mai de-a dreptul că există, şi în domeniul arid al matematicilor, probleme încîntătoare ce pot delecta spiritul întocmai ca şi unele subiecte din literatura beletristică. Şi aceasta cu atît mai mult acum, cînd unii mai susţin că ... „ştiinţa dezumanizează, alienează sau pune în primejdie soarta omenirii ... (1)“. De altfel, într-o cărţulie, apărută nu de mult la Paris, autorul consideră că nici: „nu-i corect să se vorbească

despre frumusețea unei formule matematice, fiindcă", adaugă el, „sub toate aspectele ei, activitatea științifică se opune activității literare, aceasta din urmă fiind exercitată mai ales în vederea plăcerii și a desfătării (atît a autorului cît și a cititorului); ea urmărește să creeze diferite forme ale frumosului să trezească emoțiile estetice... literatura refuzînd să se pună în serviciul utilității ..." (2). Desigur că unor asemenea afirmații le-am putea opune nenumărate altele, datorită unor mari poeți și prozatori dar în locul lor îmi vine mai la îndemînă să folosesc aceste rînduri care le rezumă: „... știința este imaginativă, știința consumă mai multă fantezie decît poezia și mai mult curaj decît o șarjă de cavalerie ..."(loc cit. nr. 1 p. 317) . Povestea numărului π are să-ți dovedească faptul că între actul creației artistice și acela al creației matematice nu există gard despărțitor, amîndouă purtînd pecetea frumuseții pure, a formei ce încîntă sufletul mai înainte de a o dărui spre folosință observatoarelor astronomice, laboratoarelor sau uzinelor.

Dar dacă m-ai întreba, dragă cititorule, de ce i s-a dat atîta atenție numărului π, drept să-ți spun că nu știu ce ți-aș putea răspunde! Faptul că prin acest număr se exprimă mărimea *raportului constant* dintre lungimea unui cerc și diametrul său nu-i un motiv destul de întemeiat. Numai această proprietate nu l-ar fi putut lansa în vedetă căci mai sînt și alte numere cu proprietăți interesante (3) care nu au depășit domeniul restrîns al matematicilor pure. S-ar părea că, la răspîndirea faimei numărului π a contribuit ideea năstrușnică a unui geometru grec, — nimeni nu-i mai știe numele nici cînd și unde a trăit —, care a vrut să construiască *un pătrat de arie exact egală cu a unui cerc de rază dată*, folosind în acest scop instrumentele consacrate pe atunci în geometrie, anume *rigla* și *compasul*. Or, această simplă problemă de geometrie elementară, în care ai recunoscut, cu siguranță, *cuadratura cercului*, a fost buturuga mică în stare să răstoarne carul mare. Neputînd explica de ce nu este posibil să se găsească, folosind rigla și compasul, latura pătratului de arie exact egală cu a unui cerc, geometrilor greci, care

J. L. Lagrange
scriind formule

rezolvaseră probleme cu mult mai complicate în aparență, nu le venea să creadă că s-ar putea împotmoli tocmai aici. Mai îndîrjiți încă, se arătau prietenii lor, poeții și filozofii Eladei care, aflînd de necazul geometrilor și știind mai puțină geometrie decît ei, se credeau chemați să le dezlege această problemă. Și așa, propunînd azi o soluție, care se dovedea, natural, greșită, mîine două, poimîine nouă, cuadratura cercului, care ar fi trebuit să fie numai o preocupare a geometrilor, a devenit, dintr-o dată, preocuparea de predilecție a gînditorilor greci, transformîndu-se într-o delectare pur spirituală, cu nimic mai deosebită decît aceea de a compune comedii sau tragedii. Cuadratura cercului a atins astfel celebritatea tragediilor lui Eschil care probabil că le-a compus tot pe atunci și tot ca ele și-a păstrat prospețimea chiar și după ce umbra geometrilor greci a dispărut. Problema a fost luată de matematicienii arabi, apoi de cei din evul mediu, după aceea de cei din Renaștere și a trecut, mai departe, din secol în secol, pînă la sfîrșitul celui de-al XIX-lea, cînd matematicienii au aflat *de ce nu se poate construi un pătrat de arie exact*

René Descartes

egală cu a unui cerc dat, folosind ca instrumente rigla și compasul.

Pentru matematicieni, povestea se sfîrșește aici, dar nu și pentru profani căci mai există și azi mulți „cuadraturiști" ferm convinși că *au găsit*, sau sînt pe punctul de *a găsi*, soluția mult rîvnită ! Fiindcă am de gînd să ți-o povestesc pe îndelete, află, dragă cititorule, că unele dintre momentele mai de seamă am încercat să ți le înfățișez prin dialoguri între personajele principale, fără ca prin aceasta să te fac să nu le poți înțelege graiul, — mai ales dacă nu ai fost printre primii în clasă la acest obiect —, dar nici să știrbesc ceva din rigurozitatea adevărului tematic. Iar dacă, din întîmplare, ești „un nefericit îndrăgostit de matematici" ca Paul Valéry, atunci, ca să poți urmări povestea de-a fir a păr, află că vei găsi, în notele de la sfîrșitul cărții, anumite demonstrații ce pot fi înțelese ușor chiar și de un elev de liceu și, în plus, informații bibliografice și istorice, prin care să poți pătrunde pînă *în negura vremii*.

I

ÎN NEGURA VREMII

„Cînd omul a făcut saltul, de la gîndirea limitată numai la observații concrete, la gîndirea abstractă, atunci a sunat marele, ireversibilul ceas al începutului. Din această clipă... care se află în urmă numai cu 600 000 pînă la 1 000 000 de ani, spiritualitatea a devenit semnul său distinctiv".

Ivar Lissner (4)

Să începem povestea de atunci de cînd oamenii trăiau în triburi, se adăposteau în peșteri și nu visau că s-ar putea trăi altfel. De pe atunci, unii dintre ei simțeau un fel de încîntare ori de cîte ori împodobeau pereții locuinței lor, sau alte stînci din apropiere, cu figuri colorate cu ocru sau cărămiziu, ori dacă crestau oasele sau coarnele rămase de la animalele vînate. Printre figurile desenate de ei nu lipseau liniile drepte și cercurile. Dacă linia dreaptă era imaginea unui trunchi de copac bine crescut sau a unei raze de soare strecurîndu-se prin desișuri, cercul era chiar imaginea Soarelui, pe care îl priveau cu dragoste și uimire, bucurîndu-se cînd răsărea dimineața și tremurînd de îngrijorare în amurg, cînd apunea. Unii dintre ei se vor fi desfătînd, întruchipînd forma soarelui dintr-o nuia pe care o îndoiau și-i legau capetele cu coaja încă umedă, abia jupuită de pe creangă. Și așa azi, așa mîine, *cînd*, nu se poate preciza, — fiindcă pe atunci nu existau ani și de aceea nu aveau ce număra, iar după numărătoarea noastră de acum am putea presupune că au putut trece 100, sau 200 sau chiar 1000 de mii de ani —, unuia dintre acești oameni trebuie să-i fi trecut prin minte ideea de *a măsura*, adică de a vedea de cîte ori se cuprinde *lărgimea* cercului — în vorbirea noastră diametrul cercului — în lungimea lui, adică a nuielii care se îndoia. Operația nu era deloc simplă. Ca să o facă, trebuia să măsoare întîi lărgimea sau grosimea cercului cu o nuia, adică să o taie la capete în așa fel încît ea să acopere tocmai partea cea mai groasă a cercului. După aceea, să dezdoaie nuiaua din care era făcut

cercul și să suprapună una dintre nuiele — pe cea mai mică — peste cealaltă, începînd de la un capăt. Cînd a reușit să facă aceasta, acel prim matematician al omenirii a aflat ceva extraordinar de curios. Anume, că nuiaua cea mică putea fi pusă o dată și încă o dată și încă o dată peste cealaltă. Numărul trei nu se născuse prin *nume*, dar apăruse astfel prin această operație. Rezultatul se repeta, oricare ar fi fost cercul, dacă se lua ca unitate de măsură grosimea lui așa că, odată cu numărul trei, și sub înfățișarea lui, a apărut numărul π, și acesta tot numai ca o idee neexprimată prin nume, fiindcă pe atunci nu se inventase vreun fel de alfabet ! Numărul π apare ca o *lege*, sau mai bine zis ca o *taină*, taina cercului și taina soarelui, *taină* fiindcă nimeni nu putea explica de ce există un *raport constant* între lungimea unui cerc și diametrul său. De ce grosimea cercului este totdeauna cuprinsă de același număr de ori, adică odată, încăodată și încăodată în lungimea cercului? Peste nenumărate veacuri, după ce oamenii au cunoscut numerele și au inventat scrierea, acest *raport constant* dintre lungimea cercului și diametrul său s-a notat cu litera grecească π, inițiala cuvîntului „peripheria", adică marginea cercului. Litera π nu-i numai o simplă notație, ci ea trebuie privită ca un *nume propriu*, așa cum Ion sau Maria sînt nume proprii. Ba chiar și mai mult, căci fiind mulți oameni care poartă aceste nume, lor li se mai adaugă încă unul sau două ca să se specifice despre care anume om este vorba, pe cînd, în mulțimea infinită a numerelor este unul singur cu numele de π, considerat ca avînd o valoare aproximativă de 3,14.

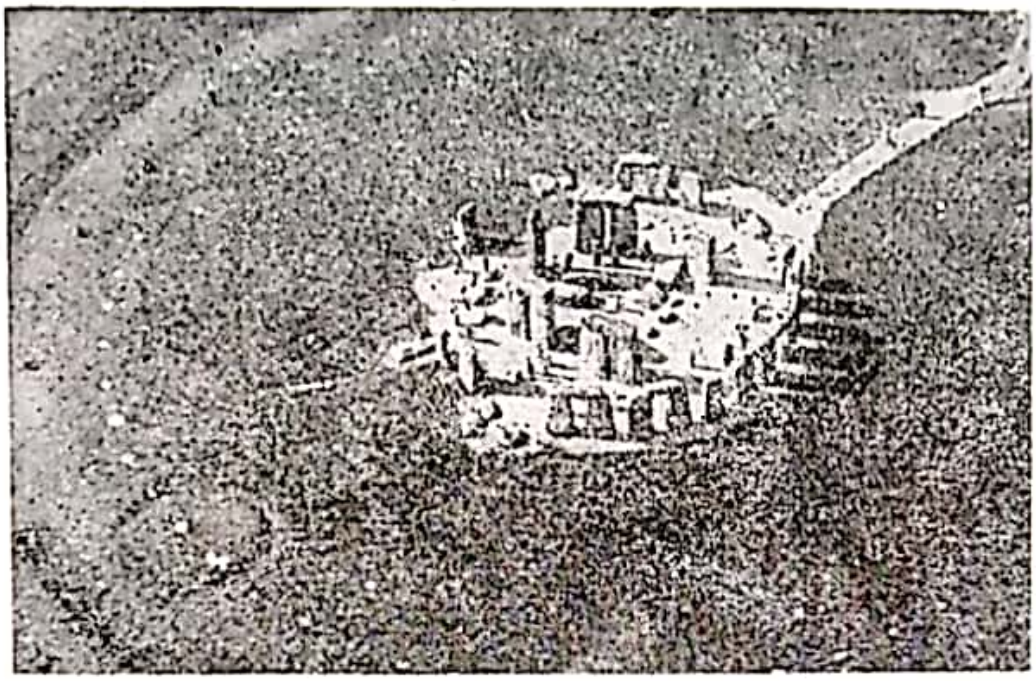
Odată ajuns stăpînul unei legi așa de importante, dar la fel de neînțeleasă de el ca și succesiunea zilelor și a nopților, omul a transmis-o din generație în generație, și din loc în loc, pe toată suprafața pămîntului și a fost folosită de toți meșteșugarii care aveau de-a face cu cercuri sau sfere de anumite mărimi, acestea putînd fi confecționate dintr-o dată, fără alte încercări. Astfel putea cioplitorul în piatră să dea mărimea potrivită capacului ce avea să acopere gura fîntînii sau să croiască el însuși colacul unei fîntîni săpate atunci. Coșurile de nuiele puteau lua mărimea dorită și nu împletite la întîmplare, tot așa roțile de la căruțe și cîte și mai cîte... O mărturie prețioasă despre numărul π o găsim și în acele construcții megalitice în formă de cerc (de unde și denumirea de *cromlehuri*), impre-

Calendarul aztec.

sionante monumente rămase din preistorie ce se află răspîndite pretutindeni, mai ales în localitățile așezate prin apropierea mărilor și oceanelor (loc. cit. 4, p. 68). Chiar și Homer amintește despre așezarea în cerc a pietrelor atunci cînd descrie, în Iliada, scena judecății de pe scutul lui Ahile : „Acolo, judecătorii cei bătrîni s-au așezat pe pietrele lustruite, în cercul sacru..." (5). Și tot ca aparținînd de această epocă preistorică, trebuie să amintim și despre monumentele din piatră ale vechilor popoare ale Americii Centrale și ale Americii de Sud, printre care calendarul aztec rămîne încă o enigmă.

Iar dacă pășim cu cîteva mii de ani mai încoace, cînd oamenii știau să scrie, printre primele însemnări ce le-au făcut o găsim și pe aceasta cu privire la existența unui raport constant între lungimea cercului și diametrul său. Astfel, pe o tăbliță de cărămidă arsă, dezgropată în cîmpia Mesopotamiei, datînd din al doilea mileniu î.e.n., a fost descifrată problema : „Dacă 60 este perimetru, a treia parte din 60 este 20. Acesta este diametru" (6). Aceeași valoare, $\pi = 3$ este indicată, într-o formă analoagă, în problemele ce s-au aflat în cele mai vechi papirusuri egiptene,

în vechile scrieri ale hinduşilor, chinezilor, ale popoarelor din sudul Mexicului etc. Dar, prin al doilea mileniu î.e.n., cercetările matematice ale egiptenilor şi ale babilonienilor au făcut un pas mai departe şi au descoperit că *adevărata valoare* a raportului dintre lungimea cercului şi diametrul



Cromlehul Stonehenge văzut din avion

lui nu este chiar „3", ci mai mare decît 3. Valorile aflate de ei nu erau însă aceleaşi. În notaţia noastră de azi, babilonienii pretindeau că $\pi = 3{,}125$, iar egiptenii că $\pi = 3{,}160$ (7). Nici una dintre aceste valori nu corespunde aceleia pe care o cunoaştem noi, dar amîndouă au exactă prima cifră zecimală de după 3. Această nouă descoperire trebuia să-i fi tulburat pe învăţaţii din acele ţări, fiindcă vedeau în ea un semn de neîncredere, de nesiguranţă faţă de rezultatele moştenite de la înaintaşi. Au înţeles atunci că trăinicia unui adevăr matematic nu se poate sprijini numai pe măsurătorile practice, ci lor trebuie să li se adauge raţionamentul matematic. Şi astfel, chiar dacă în viaţa de toate zilele s-a continuat să se folosească valoarea străveche $\pi = 3$, cea proaspăt aflată devenea un prilej de discuţii tainice între cei iniţiaţi, prilej de meditaţii cu substrat filozofic asupra faptului că o lege, deşi absolută în sine — fiindcă raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său se arăta a rămîne *constant* — modul ei de exprimare, — adică valoarea acestui raport — , se poate mo-

difica. Socotelile care au condus la aceste valori neașteptate ale numărului π nu mai erau așa de simple ca acelea din care rezulta valoarea $\pi = 3$. Prin noua sa înfățișare, numărul π se desprindea dintr-o dată de mulțimea numerelor întregi, naturale, și intră în altă categorie, nouă, aceea a *numerelor fracționare*, numere pe care egiptenii și babilonienii le-au intuit și acceptat ca atare, spre deosebire de greci care, deși au meritul de a fi ridicat geometria pe culmile moderne, nu au conceput numărul decît sub forma lui originală, naturală, de număr întreg, diferit de zero. Asemenea întîmplări, curioase, neliniștitoare, nu au fost consemnate de nici un cronicar al vieții științifice de atunci, dar amintirea lor s-a păstrat printre rîndurile problemelor însemnate de scribii din cele două ținuturi, de unii pe papirus, de alții pe tăblițele de lut (8). Dacă vrei să aflăm amănunte, am putea asista chiar la o anumită discuție de pe atunci. Pentru aceasta, ți-aș propune, dragă cititorule, să ne întoarcem în timp și să străbatem spațiul. De rătăcit, n-avem cum ne rătăci. Poposim liniștiți în preajma maiestuoasei piramide a lui Kheops, tocmai acum cînd *răsare Ra luminînd Egiptul...*

II

RĂSARE „RA" LUMINÎND EGIPTUL

„Știința prelucrătoare a gîndului, umilă în fața experienței, dar sigură de puterile sale,... constituie cea mai valabilă definiție a matematicii."

Octav Onicescu

În anul 1842 î.e.n., Amenemhet al III-lea, faraonul Egiptului de sus și de jos, intra în al șaptelea an de domnie. Dorind să trimită daruri, de sărbătorile Anului nou, regelui Ammizadugga al Babilonului, Sumerici, Accadiei și al celor patru regiuni, cu care legase de cîțiva ani relații comerciale și de prietenie, a chemat pe învățatul Imhotep (9) și i-a încredințat această sarcină. Dacă prezentarea scrisorilor, transmiterea mesajelor verbale sau îndeplinirea ritualelor și a instrucțiunilor primite nu-l neliniștea prea mult pe Imhotep, organizarea caravanei menită să transporte acele daruri scumpe, printre care se aflau și 20 de mine de aur (10), i-a dat mult de lucru. Drumul era lung și greu. Ca să străbată cu bine deșertul, trebuia să prevadă apă suficientă, provizii, sandale și, totodată, destui păzitori puternici și bine înarmați, care să facă față atacului vreunui trib străin.

Părăsind palatul, caravana trecu prin fața caselor bogate, întinse pe mari parcele de pămînt, prin curțile cărora alergau mulțime de sclavi. Erau plăcute la vedere acele case, ca niște mici palate, cu cîte 60—70 camere și coridoare, iar Imhotep le admira construcția arhitectonică. Numai că, această admirație era învăluită într-un adînc sentiment de amărăciune. Încerca să îngrămădească, doar pe suprafața ocupată de vreo 8 case de acest fel, tot cartierul săracilor de la marginea de apus a orașului și mintea lui nu reușea. Bogăției din fața lui, el îi suprapunea înghesuiala neomenească a cocioabelor în care forfoteau, ca niște furnici, tineri și vîrstnici, locuind cîte 5 ori 6 inși în fiecare cămăruță. Cunoștea bine, încă din copilărie, acest

Problema 48 din papirusul Rhind

cartier, unde mama lui îl trimitea adesea cu cîte un coș plin de mîncare sau de îmbrăcăminte uzată. El locuia atunci prin apropiere, într-o căsuță modestă dar îmbelșugată, fiindcă părinții lui fuseseră negustori destul de înstăriți. Și azi păstra obiceiul de a mai trece prin acele locuri și de a mai da ajutor la nevoie. Cînd orașul a rămas în urmă, cerul senin și imensa întindere a pustiului au șters din mintea lui Imhotep urmele acelui început de răzvrătire neputincioasă. În jurul lui era liniște și, pe nesimțite, s-a identificat cu ea. Zîmbi mulțumit la gîndul că-l va reîntîlni pe înțeleptul Iliduri (11) cu care legase prietenie, cu doi ani în urmă, cînd acesta venise la Teba. Cum l-a văzut, a simțit căldura prieteniei izvorînd în sufletul lui : s-au privit unul pe altul și și-au vorbit, parcă s-ar fi cunoscut de multă vreme. Da ! A uitat atunci cu totul învățătura lui Ptah-Hotap, care-i fusese de atîtea ori pavăză, și gîndul nu i-a mai șoptit ca altădată : „fii cu băgare de seamă cînd legi o prietenie și încearcă mai întîi prietenul într-o convorbire ca să vezi dacă merită încrederea ta“ (12). Aștepta cu răbdare și bucurie să-și revadă prietenul și să discute cu el anumite probleme scumpe sufletului său.

Aproape două săptămîni, înainte și în timpul serbărilor, cei doi prieteni nu au avut timp să stea de vorbă în tihnă. Pe lîngă obligațiile ce trebuiau îndeplinite, pe Imhotep îl mai interesau clădirile ce se aflau acolo. De-abia după ce s-au sfîrșit serbările, Iliduri l-a poftit pe Imhotep în casa lui și acolo, îndată după binețe, convorbirea dintre ei s-a îndreptat către acele tainice preocupări matematice care-i pasionau pe amîndoi, ori de cîte ori puteau pune barieră între ei și grijile zilnice.

— Cred că-ți amintești, iubite prieten și frate, cele ce am discutat în privința cercului, atunci cînd ne-am cunoscut, la Teba, a spus Imhotep. Doresc să-ți arăt ce rezultate noi am mai aflat.

— Nerăbdător sînt să te ascult, fratele meu scump. Știu că te străduiai să afli un mijloc nou de a calcula lungimea și aria cercului. Nu te mulțumea metoda care stabilește lungimea cercului, înmulțind diametrul lui cu 3, și nici aceea care arată că aria cercului se obține înmulțind, tot cu 3, pătratul jumătății diametrului. Ți-am dat dreptate deși nu am văzut, și nu văd nici acum, vreo cale ușoară care să conducă la un rezultat mai precis. Dacă ai descoperit-o, sînt nerăbdător să mi-o arăți și mie.

Întinzînd o foaie de papirus, Imhotep a muiat bețișorul de trestie în vopseaua de negru de fum, pe care și-o pregătise în timp ce discutau, și a spus :

— Am pornit de la compararea ariei cercului cu a pătratului circumscris lui (13) alegînd lungimea diametrului de 9 khet[1]. Dacă împart fiecare latură a pătratului în trei părți egale și unesc punctele din vecinătatea colțurilor, formez o figură cu 8 laturi (fig. 1-a). Aceasta cred că poate înlocui mai bine cercul decît aceea cu 6 laturi (fig. 1-b) pe care o folosim de obicei.

— Așa-i, a zis Iliduri. Văd bine că aria și lungimea acestei figuri cu 8 laturi sînt mai apropiate de cerc, fiindcă figura taie cercul, așa că, ceea ce prisosește într-o parte compensează ceea ce lipsește din cealaltă parte (14). Aș vrea să știu numai dacă aceste mărimi se pot exprima într-o formă ușor de reținut pentru un scrib? Căci un scrib nu are căderea să-și bată capul cu o metodă încîlcită, pe care lesne o poate încurca !

---

[1] Unitatea de lungime folosită de egipteni se numea *Khet* și avea aproximativ 17,25 m.

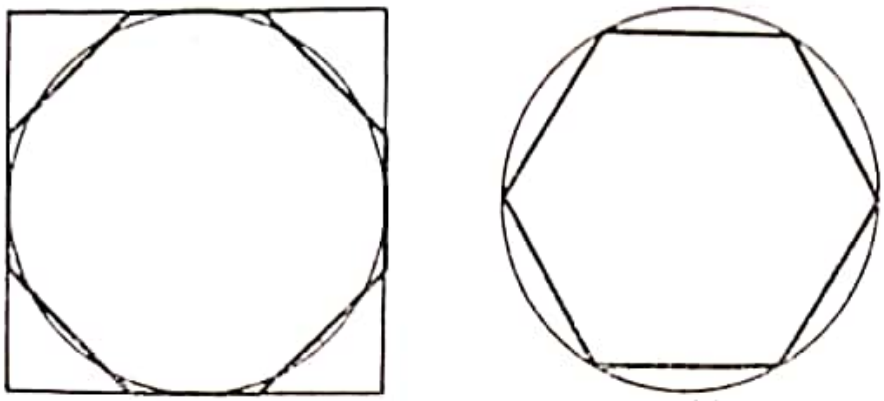


Fig. 1

— M-am așteptat la această întrebare, a răspuns Imhotep. Era și firesc să mi-o pui dumneata, fost părinte al școlii (15) care, numai din dorința de a-i ajuta pe elevi ca să aibă o parte dintre socotelI gata făcute, te-ai silit să le întocmești o mulțime de tabele!

— Se evită multe greșeli cînd ai calculele făcute de-a gata, a replicat Iliduri.

— Întocmai. Și de multe ori m-am gîndit că ar fi bine să introduc și la noi această metodă, ba chiar să calculez și eu cîteva tabele, măcar pentru înmulțire și ridicarea la putere... Am tot amînat, știu eu de ce? Să fie din cauză că n-am avut vreme?

— Poate mai degrabă, a intervenit Iliduri, pentru că metodele folosite la noi nu se potrivesc acolo! Cred că dacă tabelele despre care vorbești ar fi fost necesare, s-ar fi găsit cine să le facă, dumneata sau altul. Nu merită să te necăjești din această pricină, ci te rog să-mi arăți cum ai stabilit calculele?

— Deocamdată, aș vrea să-ți arăt cum am găsit aria cercului, fiindcă procedeul e mai simplu, a răspuns Imhotep, reluînd desenul. Asemănînd-o cu aria figurii cu 8 laturi, înseamnă că din aria pătratului să se scoată ariile celor 4 triunghiuri de la colțuri, sau, ce-i tot una, ariile a două pătrate cu latura de 3 khet (fig. 2). Or, fiindcă aria unui pătrat are 9 setat[1], pe acesta îl pot înlocui cu un dreptunghi lung de 9 khet și lat de 1 khet.

— Am înțeles. Ai redus ariile celor două pătrate la două fîșii dreptunghiulare, avînd fiecare drept lățime 1/9 din latura pătratului circumscris cercului...

---

[1] Numirea dată de egipteni la unitatea de arie era *Setat*, 1 setat = = 1 khet^2.

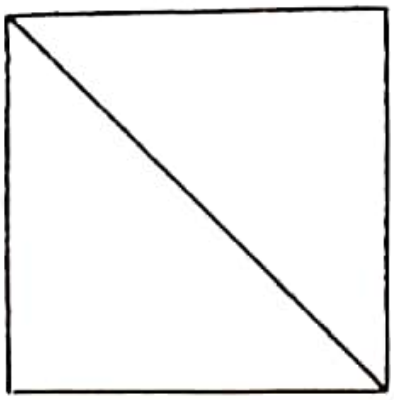


Fig. 2

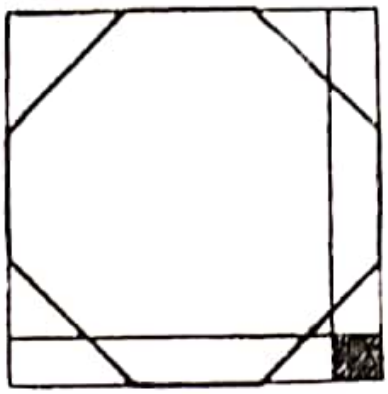


Fig. 3

— Foarte adevărat ! Și pe acestea am să le tai, una de-a lungul și alta de-a latul pătratului (fig. 3), astfel ca să obțin un nou pătrat, dar cu latura de 8 khet. Nu-i frumos? — a întrebat fericit Imhotep.

— Foarte frumos, s-a bucurat Iliduri. Acum arată-mi și socoteala pe care va trebui să o facă scribul tău !

— Iat-o, a spus Imhotep : „Exemplu de cîmp rotund de diametru 9 khet. Care este aria ? Ia deoparte $\frac{1}{9}$ din diametru [1], adică 1 ; rămîne 8. Înmulțește de 8 ori 8, fac 64. Așadar, aria este 64 setat.

Se procedează astfel : 1 9 $\frac{1}{9}$ 1, acesta luat deoparte dă 8.

1 8 setat
2 16 setat
4 32 setat
8 64 setat.

Aria [2] este de 64 setat“ (16).

---

[1] Latura pătratului, considerată ca un întreg, fiind de 9 khet, $\frac{1}{9}$ din ea înseamnă chiar 1 khet.

[2] Semnificația numerelor transcrise exact din papirusul Rhind (16) este următoarea „1 9“ înseamnă că lungimea întreagă se consideră de 9 unități. „$\frac{1}{9}$ 1“ exprimă că a noua parte din lungimea întreagă este egală cu unitatea de lungime și deci aceasta scăzută din cele 9 unități dă 8 unități : „1 8“. Acum, ca să afle aria, scribul egiptean trebuia să facă înmulțirea lui 8 cu 8. Dar pe atunci înmulțirea nu se făcea ca acum, ci printr-un procedeu combinat de dedublare și adunare a sumelor parțiale, dacă înmulțitorul nu era un multiplu al lui 2. În acest caz, rezultatul a fost obținut numai prin dedublare și aceste operații sînt arătate pe larg de către scrib. Astfel el spune : „odată 8 fac 8“, apoi în rîndul doi, trebuie să citim „de două ori 8 fac 16“. Iar mai departe : „de patru ori 8 fac 32“ și, în fine, „de 8 ori 8 fac 64“.

— Te felicesc pentru că ai reușit să formezi, într-un mod așa de simplu, acest pătrat a cărui arie este *aproape* egală cu a cercului, a spus Iliduri cînd prietenul său a tăcut.

— Ai dreptate, nu-i *chiar egală*, fiindcă îi mai lipsește aria acelui mic pătrat cu latura de 1 khet, din colțul de jos, pe care l-am socotit de două ori, a răspuns Imhotep. La început, cînd mi-a străfulgerat prin minte ideea că pot transforma ariile celor patru triunghiuri tăiate din colțuri, în două fîșii, prin care pot reveni la un nou pătrat, nu observasem suprapunerea, iar după ce am obținut rezultatul, n-am mai putut renunța la el, fiindcă oricît am încercat, nu am mai găsit altă metodă care să fie așa de simplă ca aceasta.

— Cred ! Dar nu ai motiv de îngrijorare, fiindcă diferența dintre cele două arii nici nu-i prea mare ! Cu ea sau fără ea, tot mai rămînea o deosebire între aria cercului și aceea a figurii cu 8 laturi prin care ai reușit să o înlocuiești, a vorbit iar Iliduri, adăugînd, după cîteva clipe de tăcere : Ceea ce mă minunează este că și prin acest nou procedeu de a calcula aria cercului, taina formei lui se păstrează, schimbîndu-și numai înfățișarea. Am socotit acum în minte că oricît de mare sau de mic ar f i cercul, aria lui rămîne mereu egală cu $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ din pătratul diametrului său, adică din aria pătratului circumscris lui. Pentru noi, valoarea raportului era $\frac{3}{4}$. Mă întreb dacă nu cumva același raport constant apare și între lungimea cercului și diametrul lui?

— Ei bine, află că uimirea mea a fost așa de mare ca și a dumitale, frate scump, cînd m-am încredințat că această legătură există în adevăr — a șoptit Imhotep !

— Ai putut stabili și acest fapt? Cum ai procedat? Te rog să-mi arăți calea, pe care o bănuiesc cu mult mai ascunsă.

— În adevăr, a răspuns Imhotep. M-au chinuit mult gîndurile pînă am stabilit cea mai simplă formă care să-mi exprime lungimea cercului ! Căci dacă am putut lega destul de ușor aria cercului de aria pătratului cu latura de 8 khet, nu am mai găsit aceeași legătură între lungimea cercului și perimetrul figurii cu 8 laturi.

— Se vede aceasta destul de clar, dacă privești mai atent figura ce ai desenat-o (fig. 3).

— Așadar, întîi am încercat să calculez cît se pierde din latura pătratului circumscris cercului cînd înlocuiesc colțurile lui prin laturile cele teșite ale figurii cu 8 laturi și după aceea am căutat un nou pătrat al cărui perimetru să se apropie mai mult de acela al cercului, decît perimetrul pătratului cu latura de 8 khet.

— Cred că a fost foarte greu, fiindcă diferențele dintre laturile acestor două pătrate ce le aveai în vedere ca să regăsești raportul $\left(\frac{8}{9}\right)^2$, trebuie să fi fost destul de mici.

— Te-aș amăgi, dacă aș afirma că am căutat dinadins acest raport, a mărturisit Imhotep. Mă gîndeam numai să apreciez cît mai exact latura pătratului *al cărui perimetru* să corespundă perimetrului figurii cu 8 laturi și atunci raportul $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ a apărut de la sine... Îmi aduc aminte și acum ! Era într-o dimineață, cu mult mai înainte ca Ra să binecuvînteze Pămîntul cu razele sale, cînd mi-a trecut prin minte să repet procedeul folosit la calcularea ariei cercului, dar aplicîndu-l de data aceasta la pătratul cu latura de 8 khet. M-am apucat de lucru și sufletul meu a întîmpinat primele raze dătătoare de viață ale lui Ra, într-o fericire imposibil de domolit. Iată cum am procedat... (17).

Cînd Imhotep a terminat, Iliduri și-a privit prietenul cu admirație. I-a vorbit tîrziu, după ce acesta își strînsese uneltele de scris.

— Dacă n-am greșit socoteala, îmi pare că raportul dintre lungimea cercului și diametrul lui este aproape cu $\frac{1}{6}$ mai mare decît trei? [1]

— Aproape, a admis Imhotep.

— Uite de ce te-am întrebat, a insistat Iliduri. Pînă acum, noi și voi, am socotit că lungimea cercului este egală cu 3 lungimi ale diametrului. De altfel, cred că și de acum înainte, multă vreme scribii noștri vor mai aplica vechiul procedeu, fiind cu mult mai ușor de executat. Și-apoi,

[1] Din calculele făcute de egipteni rezultă

$$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \simeq 3 + \frac{1}{6} \simeq 3{,}16.$$

fiindcă nici mare pagubă nu-i dacă, la aria unui teren circular, rezultatul arată cu 1 sau 2 setat mai puțin decît ar fi în realitate ! Pe oameni nu-i încurcă prea mult faptul că 3 lungimi de diametru ar lăsa descoperită o parte din marginea cercului, care ar fi abia cît este $\frac{1}{6}$ din diametrul lui. Însă rezultatul cel nou îmi pare foarte important și trebuie folosit în calculele pentru stabilirea drumului astrelor, pentru că astfel vom obține o mai sigură măsură a timpului.

— Din această cauză m-am străduit și eu. Știi bine cît de necesar este pentru noi să fie calculate exact perioadele de revărsare a Nilului. De cîte ori observam că poziția Soarelui, a Lunii sau a lui Sirius nu se potriveau cu acelea ce le aflam prin calcule, îmi ziceam că numai aici trebuie să caut greșeala. De aceea am și fost așa de fericit cînd am putut stabili o valoare mai precisă pentru aria și lungimea cercului. Și nici nu poți să-ți închipui cît de mult aș dori să desăvîrșesc procedeul, în așa fel ca să pot afla chiar *valoarea exactă* a lor, a îngînat visător Imhotep.

— Exactă? s-a mirat Iliduri privindu-și curios prietenul. Eu, de cîte ori mă gîndesc la această problemă, îmi apare ca o poveste căreia nu-i voi putea auzi sfîrșitul.

— De ce? întrebă Imhotep. Poate fiindcă ai adormi mai înainte ca ea să se fi terminat? Ei bine, în acest caz ea s-ar putea repeta pînă cînd, treaz fiind, ai putea-o asculta pînă la capăt. Doar nu vrei să-mi spui că problema nu ar avea o dezlegare? Desigur că acum, în cercetările noastre geometrice, nu există drumuri bătătorite și pornind pe o cărăruie croită în neștire, poți nimeri ușor într-o mlaștină. Dar aceasta nu poate dura la nesfîrșit. Cu timpul se vor stabili drumuri largi și sigure și atunci cred că se va ști *cu exactitate* și de cîte ori se cuprinde diametrul în lungimea cercului ! Atunci se va cunoaște și sfîrșitul poveștii !

Iliduri nu a mai zis nimic. A tăcut și Imhotep, dar gîndurile lui goneau neobosite prin adîncul vremurilor viitoare, cercînd să zărească undeva, în hăul veșniciei, năluca soluției care-l ademenea. Apoi, fără să știe cum, acele gînduri au alunecat pe panta duioasă a amintirilor. S-a văzut copil, privind cu sfială semnele viu colorate de pe pereții și coloanele uriașului templu, ținîndu-se strîns de mîna mamei lui. Mîngîindu-l pe cap, ea s-a aplecat și i-a șoptit

la ureche că în acele figuri se ascund vorbele oamenilor învățați. Nu a putut înțelege atunci cum se pot lipi vorbele oamenilor de pereți și a început să privească cu frică acele semne purtătoare de vorbe. Cînd s-a făcut mare, tatăl lui l-a dus la școala de scribi (18). Ca o adiere de vînt îl învăluia emoția ce-l stăpînea atunci pe drum, cînd tatăl lui îi vorbea îngrijorat: „Să pui, copile, tot sufletul tău în învățătură și să o iubești ca pe mama ta, căci nimic nu poate depăși știința. Prin ea vei avea o viață mai ușoară decît aceea pe care am avut-o eu“ (19). Vorbele acelea îi sunau acum iar în urechi: „În toate îndeletnicirile trebuie să te supui cuiva, singur omul învățat se supune lui însuși. Odată ce mînuiești cu ușurință uneltele scrierii, toate ușile îți sînt deschise, poți deveni funcționar și cîștigul îți este asigurat. De aceea, învață bine, ca să te faci scrib și să conduci pe ceilalți oameni... Un scrib harnic, ajunge departe. Însă trebuie să se țină de treabă ca să fie fericit, și dacă nu-i place munca lui, atunci fericirea fuge de el“ (20)

Cînd a terminat școala de scribi și a dat examen, pe toate problemele care le-a avut de rezolvat, profesorul a scris: „ai socotit bine“ (21).

De atunci n-a mai părăsit uneltele de scris.

Aici Iliduri și-a întrerupt prietenul din visare spunîndu-i:

— Fiindcă nu sîntem de acord asupra viitorului soluției acestei probleme, vreau să-ți arăt cum de am ajuns să o privesc ca pe o poveste fără de sfîrșit. Calcule asemănătoare celor ce mi le-ai înfățișat, m-au purtat și pe mine pe căi necunoscute. M-am străduit și eu să stabilesc lungimea cercului dar am fost mai puțin norocos decît tine, dragul meu prieten. Eu am pornit de la un anume triunghi isoscel și am încercat să găsesc raza cercului circumscris lui. Apoi, am cercetat aceeași problemă, înlocuind triunghiul isoscel cu altul echilateral, apoi cu un pătrat, cu o figură cu cinci și cu șapte laturi. Din toate aceste încercări am ajuns și eu la convingerea că există un raport constant între lungimea cercului și diametrul său, care nu-i egal cu numărul 3, ci cu altul, dar acela este deosebit și de cel stabilit de dumneata. Eu l-am găsit a fi egal cu $3\frac{1}{8}$ sau, dacă ar fi să folosesc notația noastră pînă la 60, acest raport are ca valoare $3 + \frac{17}{60} + \frac{30}{60^2}$.

— Atunci s-ar putea ca tocmai valoarea aflată de tine să fie cea exactă ! Hai să refacem calculele și să ne convingem ! M-ai făcut nespus de curios și fericit totodată, că am urmărit amîndoi aceeași sălbăticiune, numai că am mers pe drumuri deosebite, a izbucnit Imhotep, din nou în vervă !

— Nu, dragul meu frate, rezultatele mele sînt cu mult mai puțin bune decît acelea ce le-ai stabilit dumneata, dar tocmai comparîndu-le cu acelea ce mi-a fost dat să le aflu acum, m-am gîndit mai adînc la procedeul ce ar trebui aplicat ca să se poată măsura exact lungimea cercului prin diametrul lui și am înțeles !...

— Atunci, îl știi? De ce mă chinui întîrziind să mi-l arăți?

— Nu, nu te chinui, ci te rog să mă asculți liniștit, dar fără să rîzi de mine ! Vezi, linia cercului este îndoită, iar diametrul este o linie dreaptă, de aceea, ca să pot măsura *exact* una cu cealaltă, ar trebui să dezdoi mai întîi linia cercului și după aceea să încep măsurătoarea. Dar, oare, se poate face această dezdoire? S-a format, oare, linia cercului prin îndoirea liniei drepte fără ca, prin această operație, să nu se fi petrecut vreo schimbare în însăși natura liniei drepte, așa după cum și timpul, cînd îl încovoaie pe om, nu-i schimbă numai înfățișarea, ci și sufletul? La aceste lucruri mă gîndeam pe cînd urmăream, în luciul ochilor dumitale, pași ce te mînau pe cărările trecutului. Am observat cu cîtă ușurință te-ai desprins de prezent și sprintenceala cu care urcai acele drumuri abrupte din trecut. Și totuși, nu erai chiar dumneata tînărul de atunci. Acela pășea înainte, iar tu te țineai în urma lui. Privindu-vă pe amîndoi, am îndrăznit să te opresc ca să nu vezi cum se încovoaie spinarea aceluia ce-ți alerga înainte !

Imhotep și-a privit prietenul cu surprindere și i-a spus :

— Ai stabilit o corespondență în armonie cu principiile noastre : „Ceea ce este sus, aceea este și jos, ceea ce este jos, aceea este și sus". O minte ascuțită poate întrezări adevărul în orice formă s-ar prezenta el și de aceea nu am căderea să te contrazic ! Gîndești dar că s-ar putea să nu existe o măsură comună între lungimea cercului și diametrul lui? Că, de aceea, nimeni nu ar putea găsi vreodată un mijloc prin care să calculeze aria sau lungimea cercului tot așa de exact cum o calculăm pe a unui pătrat?

— Dacă linia dreaptă și cercul care-i îndoit, nu se vor putea măsura cu aceeași unitate de măsură, atunci nu văd posibilitatea...

— Dar nu văd de ce n-ar exista această unitate de măsură comună? Admit că noi nu o cunoaștem, însă nu pot crede că omul de mîine va renunța să o caute!

— Dar, a răspuns hotărît Iliduri, nici n-am afirmat că nu o va căuta! Din contră, îl văd îndîrjindu-se și chiar încercînd să dovedească existența acestei măsuri comune, chiar mai înainte de a o fi găsit!

— Se poate. Chiar și eu cred că, odată și odată, s-ar putea descoperi o asemenea unitate comună...

— Poate, a admis Iliduri. Poate că, într-un fel sau altul, această problemă are să-și găsească dezlegarea peste vreo mie de ani. Ce crezi, a adăugat apoi, cu glas de șagă: va fi de ajuns o mie de ani sau să spunem mai mult?

— O mie de ani? a tresărit Imhotep. O mie de ani pînă să se stabilească aria unui cerc cu aceeași exactitate ca a unui pătrat? Cred că e mult prea mult!

Văzîndu-și prietenul cîntărind cu atîta seriozitate această durată de timp, repetînd-o, întîi nehotărît, rar și cu voce tare, apoi cu o dîrzenie ce voia să alunge îndoiala, Iliduri s-a apropiat de el, l-a îmbrățișat voios, ca pe un frate mai tînăr și a îngînat dus pe gînduri:

— Da, da, cine știe, poate că... *după un mileniu și mai bine...*

III

DUPĂ UN MILENIU ȘI MAI BINE

„Orice matematician știe că o demonstrație nu este înțeleasă cu adevărat atîta vreme cît i se verifică numai corectitudinea raționamentelor pe care le cuprinde și nu se concep ideile care au preferat acest lanț de deduceri în locul oricărui altul".

Nicolas Bourbaki [1]

Nu crezi oare, dragă cititorule, că era firească uluirea lui Imhotep, auzindu-și prietenul pretinzînd un răstimp de peste o mie de ani pentru dezlegarea problemei legată de natura raportului dintre lungimea cercului și diametrul său? Atunci, ca și acum, omul măsura timpul în mod subiectiv, prin înfăptuirile mai de seamă. Încercînd să se întoarcă cu o mie de ani în urmă, tocmai pe vremea cînd se construia prima piramidă, Imhotep a întîlnit multe realizări remarcabile — unele în legătură cu scrierea, altele de ordin tehnic sau științific — care-i marcau drumul, arătîndu-i-l peste măsură de lung. Desigur că azi, nesfîrșită ne-ar părea calea dacă am căuta să intuim, tot așa, durata unui veac ! Dacă ne-am opri, bunăoară, numai la domeniul aviației, la timidele încercări de zbor și la construcțiile de „aeroplane" de la începutul secolului XX și am încerca să trecem în revistă evenimentele petrecute pînă și după primul zbor în spațiul cosmic. De atunci, din 1961 și pînă azi, pămîntul este înconjurat de nenumărați sateliți artificiali, zborurile în lună și rachetele cosmice au devenit un fapt banal, iar cuplarea navelor spațiale, un

[1] „Nicolas Bourbaki" este un pseudonim colectiv pe care l-a ales un grup de tineri matematicieni francezi, în anul 1930. De aceea, Nicolas Bourbaki este considerat ca un metematician policefal. Proiectul grupului a fost să elaboreze un vast tratat de matematici, pornind de la noțiunile elementare și ajungînd pînă la problemele cele mai moderne. Acest tratat a început să apară din 1939, sub titlul *Elemente de matematici* și pînă azi au apărut peste 20 volume (cca 3 000 pagini).

fapt consumat. Se petrec multe în o sută de ani, dar și mai multe în o mie ! De ce totuși a avut dreptate Iliduri? Căci soluția problemei discutată de ei nu a fost stabilită în decursul mileniului ce a urmat și nici măcar în ale altor două, de după aceasta !

Cauzele care au ținut-o atîta vreme în loc, le vei pricepe numai dacă vrei să urmărim îndeaproape însuși procesul de dezvoltare a științelor matematice. Numai în cursul acestei desfășurări ele ți se vor revela, în mod treptat, odată cu metodele ce se stabileau pentru a le înlătura. Ca totul să-ți apară cît mai limpede, ar fi bine să precizăm și cum se prezentau matematicile pe vremea lui Imhotep și Iliduri. I-am văzut discutînd despre o descoperire matematică, așa cum o fac și azi atîția matematicieni, cu singura deosebire că savanții contemporani nu fac o taină din descoperirea lor, ci se grăbesc să-și publice rezultatele în reviste de specialitate, ca astfel ele să fie cunoscute și de alți cercetători din lumea întreagă, interesați de aceeași problemă. Iliduri și Imhotep au procedat altfel. Ca toți învățații de atunci, ei au păstrat cea mai adîncă tăcere asupra raționamentelor și metodelor prin care au descoperit alte valori ale numărului π, diferite de 3 și, în general, asupra oricărui procedeu care i-au condus să stabilească un adevăr matematic, lăsînd posterității impresia că ele au fost găsite doar pe cale empirică. De aceea, judecînd după materialul descoperit prin descifrarea tăbliților, a prismelor sau cilindrilor de lut, aflate în valea dintre Tigru și Eufrat, sau după acela din papirusurile găsite în piramidele sau templele egiptene, ajungem la concluzia că în școlile din Orientul antic, matematica avea un caracter empiric, practic și utilitar. Chiar și atunci cînd avîntul vieții economice și sociale a contribuit la dezvoltarea cunoștințelor matematice, acestea nu au depășit nivelul considerat azi ca elementar. Ele au fost folosite la rezolvarea problemelor esențiale din viața de toate zilele ca : măsurarea ogoarelor, stabilirea planurilor pentru ridicarea caselor sau construirea sistemelor de irigații, aflarea volumului unei grămezi de pietriș, calcularea capacității unor anumite vase în care se păstrau diferite lichide, și altele de același gen.

Deși asemenea probleme se întîlnesc și în cărțile noastre de școală, cu totul altfel erau ele prezentate atunci. Așa, de pildă, școlarul de azi consideră că două probleme în

care se cere, o dată aria unui teren circular cu raza de 30 m și a doua oară a altuia, tot circular, cu raza de 2 km, sînt aplicații ale unei aceleiași formule, anume $A = \pi r^2$. Ca să le rezolve, el va înlocui pe r, odată cu 30 și a doua oară cu 2, și va face înmulțirile indicate de formulă. Pentru scribul egiptean însă, asemenea probleme nu aveau nimic comun între ele și trebuiau judecate de fiecare dată în

Banchetul filozofilor

parte, potrivit cu datele problemei. Ei efectuau calculele după un exemplu numeric tip, pe care-l adaptau problemei, fiindcă ei nu cunoșteau o formulă generală. În școlile egiptene sau babiloniene, matematicile erau dictate elevilor ca niște *rețete* și ei învățau cum trebuie să le folosească, singura explicație a procedeului fiind cuprinsă în formula : „Așa se face".

Dacă mi-ai obiecta că și noi avem *formulare tehnice*, cuprinzînd formule matematice fără nici o demonstrație, ți-aș răspunde că de aici nu s-ar putea trage concluzia că știința noastră de azi are un caracter empiric, deoarece stabilirea acestor formule se poate găsi în orice carte teoretică de specialitate. Deosebirea dintre faptul că *tu nu știi* cum se stabilește formula ce dă aria cercului și că un scrib egiptean *nu o știa*, este esențială. Pe tine, dacă te prinde dorul să o cunoști, n-ai decît să te duci la biblioteca cea

Pitagora (detaliu din pictura lui Rafael)

mai apropiată, să cauți o geometrie plană și să citești demonstrația. Vei găsi nu una, dar foarte multe, fiindcă autorilor de manuale le face plăcere să stabilească cîte o demonstrație „mai frumușică", mai altfel decît aceea pe care le cunoștea el ! Da, da ! Nu rîde, dragă cititorule, căci asta e o boală veche și incurabilă a matematicienilor ! Ca să te încredințez, am să aleg un exemplu petrecut acum vreo mie de ani : Unul dintre cei mai renumiți matematicieni de cultură arabă, pe nume Al Biruni, a cules 23 de demonstrații diferite ale uneia și aceleiași teoreme (22). De ce? Să ți-o spună el singur : „Tu știi prea bine ce m-a îndemnat să cercetez atîtea demonstrații ; ca să adeveresc o afirmație a vechilor greci, cu privire la înjumătățirea liniei frînte înscrise într-un arc de cerc... Cîtă pasiune am simțit pentru acest lucru și cîtă plăcere am cînd îmi îndrept din nou privirea spre ele... Pentru dovedirea acestei afirmații mi-au căzut în mînă un număr mare de demonstrații ale celor mai de seamă oameni de știință și eu m-am trudit să verific exactitatea lor și să le orînduiesc. Astfel, s-a îngrămădit atîta material în care pot să-mi arunc adesea privirea mînată de dragoste pentru știință și de adorare pentru acești învățați că așa, în cele

Zenon

din urmă, le-am devenit tovarăș întru stabilirea dovezilor acestei teoreme...“ (23).

Vezi dar că de acum 1000 de ani și pînă azi, fiecare poate urmări raționamentul ce a condus pe un matematician la descoperirea unui adevăr matematic ! Dar, pe vremea egiptenilor și a babilonienilor nu era așa, fiindcă matematica era o știință secretă. Nu exista nici o scriere în care să fi fost expuse principiile care au condus la stabilirea unui adevăr matematic. Chiar dacă existau matematicieni pasionați, care au descoperit anumite adevăruri matematice pe baza cărora s-au stabilit formulele practice cunoscute, acele adevăruri au rămas îngropate în adînca tăcere din interiorul templelor, neștiute de nimeni, decît de cei inițiați, cărora le erau transmise de la ureche la ureche și s-au împrăștiat ca fumul atunci cînd războaiele sau răscoalele au răvășit rodul acelor tainice preocupări.

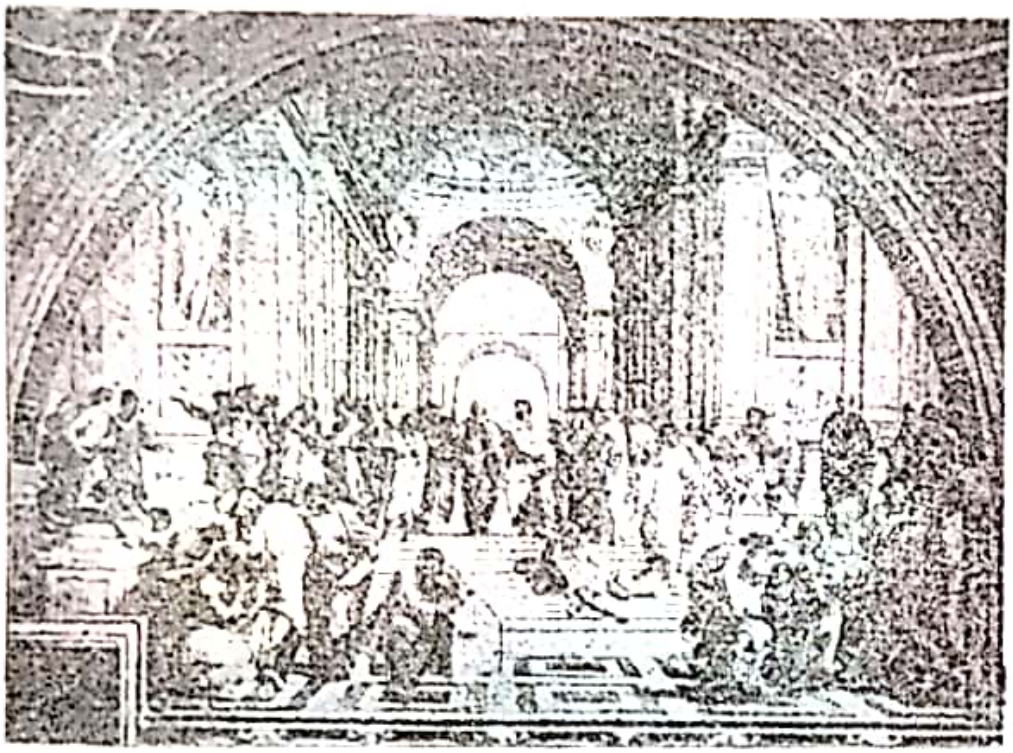
Dar mai este ceva de care trebuie să ții seamă, cititorule ! Natura problemelor ce se puteau pune și rezolva atunci, nu poate fi comparată cu a acelora de azi, pentru că o problemă matematică nu se naște ca zeița Atena, gata înarmată din capul lui Zeus, ci are un trecut și se bazează pe anumite cunoștințe stabilite anterior. Or, pro-

Socrate

blema *măsurii*, atinsă într-o formă naivă de către Iliduri, nu a putut fi pusă cu toată seriozitatea pînă în secolul al XIX-lea și tot așa aceea în legătură cu clasificarea numerelor, și fără dezlegarea lor nu se poate concepe o cercetare temeinică asupra naturii numărului π. În intervalul celor 1000 de ani, admis de magul din Babilon, nu s-au înregistrat descoperiri de această natură, ci, din contra, totul părea a fi adormit în așteptarea altei generații de gînditori, cu alte concepții sociale și științifice. Abia între veacurile VIII—VI î.e.n. au apărut condițiile prielnice pentru un nou avînt al științelor matematice, datorită, mai ales, legăturilor comerciale ce s-au stabilit pe atunci între țările Orientului antic și cetățile vechii Grecii. Legenda spune că prin secolul al VI-lea î.e.n. filozoful Tales (24) a pornit din Milet — orașul cel mai înfloritor de pe litoralul Ioniei —, înspre Egipt, atras fiind de faima înțelepciunii și de civilizația acestei țări și că întors de acolo, ar fi pus, el cel dintîi, bazele geometriei pe care ar fi cunoscut-o în această călătorie.

Nu au rămas însă nici un fel de mărturii de atunci care să arate, în mod neîndoielnic, cum s-a petrecut această asimilare a cunoștințelor matematice egiptene, care a fost

puntea de legătură între natura empirică a noțiunilor matematice folosite de popoarele din Orientul antic și acea știință logică, unitară, sistematică și armonioasă rămasă de la greci, cunoscută ca „miracolul grecesc". Epitetul nu trebuie să te mire dacă admiți că prin *miracol* se înțelege un fapt care nu poate fi încă explicat. Or, apariția geo-



Școala din Atena (de Rafael)
(Platon și Aristotel în mijloc.
La dreapta, reprezentanții științelor)

metriei grecești rămîne un miracol atîta vreme cît nu se va putea da un răspuns satisfăcător întrebărilor: Cînd și cum au transferat grecii cunoștințele răzlețe, de natură tehnico-utilitară, pe care le-au cunoscut de la popoarele din Orient, într-o știință teoretică? Cînd și în ce mod s-a produs în gîndirea matematică grecească, acel salt calitativ de despuiere a noțiunilor concrete, de toate învelișurile lor materiale, ca să se transforme în noțiunile abstracte ce stau la baza geometriei și a matematicii actuale? Din documentele existente nu se poate preciza în ce măsură au folosit matematicienii Orientului antic *noțiunile abstracte* de număr și figură, fiindcă în scrierile lor, majoritatea problemelor se referă la „5 vase de bere" la "5 saci de grîu" la „5 corăbii" la „5 oameni" și, extrem de rar

și în mod cu totul excepțional, la numărul abstract 5. La fel și în privința figurilor: desenele lor se pot considera a fi, ceea ce numim azi „planul" unui teren sau al unei construcții, fiindcă figura lor reprezenta o anumită parte a unui teren, cu dimensiunile stabilite în problemă, o anumită față a unei piramide sau bază a unui obelisc. Nici egiptenii și nici babilonienii nu au insistat, în mod explicit, așa cum au făcut grecii, asupra noțiunii abstracte de *număr* sau asupra noțiunii abstracte de *poligon*, ca *formă pură*.

Prin această nouă metodă de cercetare a naturii, introdusă odată cu procesul de abstractizare, geometria greacă a renunțat la studiul formelor și al relațiilor spațiale ale corpurilor reale și, făcînd abstracție de *proprietățile corpurilor reale*[1], ea a cercetat relațiile și proprietățile corpurilor numai sub aspectul *formei pure*[2]. Astfel, prin această izolare a formei, — ca ceea ce este comun tuturor corpurilor —, geometria greacă a ajuns la un stadiu de generalizare nemaiîntîlnită pînă atunci. Aceasta i-a permis geometriei să găsească, în mod treptat, aplicații în orice domeniu de cercetare științifică sau de aplicații practice, căci, de pildă, lungimea unui cerc rămîne egală cu $2\pi r$, fie că e vorba despre traiectoria unui electron în jurul nucleului unui atom, considerat ca o primă aproximație, fie că e vorba de gardul ce trebuie să înconjure terenul unei arene sportive. Sesizînd clar acest proces de abstractizare, vei fi de acord că prin el geometria își creează o metodă cu totul specială de cercetare a adevărurilor matematice, aceea de a le stabili numai pe calea raționamentelor: aceasta întrucît o *formă pură* nu poate fi supusă nici unui fel de experiențe! Însă o metodă logică nu-i tocmai ușor de mînuit, ea comportă multe riscuri și vei avea ocazia să te încredințezi singur, în decursul acestei povestiri, de cîte încurcături grave a fost în stare să producă. Aș putea să-ți prezint și cîteva fapte petrecute în lumea acelor filozofi greci ce au pus bazele metodei. Dacă ai ști, de pildă, cîtă bătaie de cap, cîte certuri și cîte

[1] De pildă: densitatea, greutatea, culoarea, temperatura etc.

[2] În cazul corpurilor din spațiu, se consideră cele trei dimensiuni: lungimea, lățimea și înălțimea. Figurile plane sînt privite ca avînd numai două dimensiuni, făcîndu-se astfel abstracție și de întinderea spațială, linia este privită ca avînd o singură dimensiune, iar punctul fără dimensiuni.

probleme a stîrnit numai noțiunea abstractă de punct! Admițînd că punctul nu are nici o dimensiune, unii dintre geometrii greci au tras concluzia că linia nu poate fi concepută ca formată dintr-un număr infinit de puncte, ci că ea însăși este un continuu. Părerea este susținută chiar de Aristotel, părintele *Logicii*. Iată dar, că deplina abstractizare a noțiunilor concrete însușite din lumea materială, pe care se baza noua dezvoltare a matematicii, nu i-a condus pe greci numai la introducerea rigurozității raționamentului, ci și la multe denaturări în spiritul idealismului. Acestea s-au datorat faptului că noțiunile abstracte au fost despărțite de bazele materiale din care au fost extrase! De exemplu, în școala lui Pitagora s-a stabilit o teorie mistică a numerelor, în școala eleaților, au fost imaginate celebrele paradoxuri ale lui Zenon, iar mai tîrziu, sofiștii susțineau că pot argumenta tot așa de bine asupra incognoscibilității lumii, ca și asupra inexistenței ei (25). Gînditorii greci, cu puternice înclinații spre filozofie dar, în același timp, dispuși la critică, au adoptat o filozofie combativă și nu contemplativă. Lupta ce se dădea între filozofii materialiști și cei idealiști, între dialecticieni și metafizicieni s-a reflectat chiar și în operele literare de atunci. Astfel, eroul principal din cunoscuta comedie a lui Aristofan, *Norii*, a fost chiar filozoful idealist Socrate. Autorul a arătat aici unele aspecte ale luptei care se ducea între reprezentanții concepțiilor opuse despre lume, educație sau morală și a satirizat aspectele negative ale sofiștilor, asemuind formalismul din raționamentele lor cu niște nori, numind retorica lor exagerată „limbuție prea dibace, minciună și șarlatanie“ (26).

Din cele ce ți-am spus pînă acum poți deduce și singur, dragă cititorule, că asemenea firi independente, ca acelea ale grecilor, nu se puteau mulțumi cu *rețetele de geometrie* acceptate cu docilitate de către scribii din Orientul antic numai pe baza argumentului că „așa se face“. Ei și-au pus, în mod firesc, întrebarea: „de ce se face așa?“, iar răspunsul pe care l-au găsit constituie monumentala lor creație matematică. La înfăptuirea ei au contribuit multe generații de matematicieni, aparținînd diferitelor școli filozofice răspîndite în multe orașe grecești: Milet sau Tarent, Atena sau Cyzic, Abdera sau Chios, Klazomene sau Elis, Rodos sau Megara, Samos sau Efes, Heraclea sau Chidos ș. a. Deși nu a fost matematician, Aristotel (27) „cel mai

mare cugetător al antichității", după cum îl numește Karl Marx, cunoștea îndeaproape toate problemele matematice care se puneau atunci și le folosea cu multă subtilitate în cursul lecțiilor sale, ca să-și ilustreze prin ele argumentațiile din știința logicii, pe care tocmai o inventase. Printre elevii lui cei mai de seamă se numără și matematicianul Eudem din Rodos (28), autorul unei istorii a matematicilor, datorită căreia s-a putut reconstitui o parte din începuturile matematicilor grecești. Această deosebit de importantă lucrare nu s-a păstrat în întregime, dar, printre foile rămase, se găsesc multe și interesante informații în legătură cu numărul π.

Dacă ești curios să le afli, hai să ne grăbim, ca să-l ascultăm chiar pe Aristotel care-și ține lecțiile *în grădina lui Apollon Lykeion*.

IV

ÎN GRĂDINA LUI APOLLON LYKEION

„Grecii au vorbit, cel dintîi, o limbă pe care matematicienii moderni au putut să o înțeleagă".

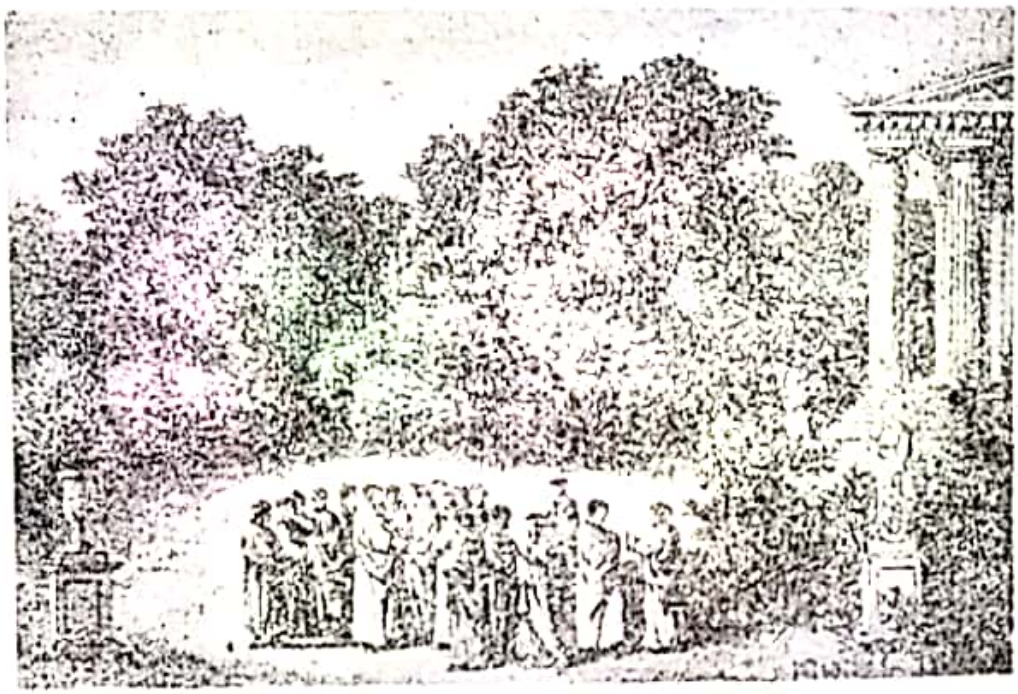
G. H. Hardy

Era în anul 325 î.e.n., într-o dimineață de la începutul lunii iunie. Lecția acromatică (29) se terminase, dar ascultătorii continuau să se plimbe pe aleile de platani din răcoroasa dumbravă a lui Apollon Lykeion, discutînd cu aprindere între ei. Aristotel se îndrepta înspre casă, însoțit de trei dintre discipolii cei mai apropiați. Ochii lui mici priveau în depărtări, căci prin minte continua să mai fîlfîie, ca o pînză sfîșiată rămasă pe un catarg, argumentele folosite în timpul lecției. Întotdeauna se destrămau încet firele acelei țesături invizibile în care reușea să prindă atenția și interesul ascultătorilor săi ca să le concentreze toate gîndurile înspre problema pe care o propunea. În fața auditoriului său, el însuși era altul: ideile pe care le adîncise îndelung se restructurau căpătînd o formă nouă, mai clară, mai accesibilă. Expunerea se modifica pe loc, fie prin adăugare de argumente ce nu le prevăzuse, fie prin eliminarea acelora ce-i apăreau acum de prisos. Astfel, integrat în logica problemei expuse, părea că pătrunde și în mintea discipolilor săi, simțindu-le nedumeririle și înlăturîndu-le. De aceea, cînd lecția se termina, legătura sufletească dintre el și elevii lui nu se curma brusc, iar Aristotel rămînea prins de mulțimea haotică a gîndurilor.

Abia cînd privirea s-a îndreptat, cu un zîmbet, către însoțitori și mîna, împodobită cu un inel prețios, a început să așeze cutele hainei lui elegante, ucenicii au înțeles că lupta interioară se terminase și că îi pot vorbi. Primul a

luat cuvîntul Teofrast [1], discipolul lui preferat nu numai pentru capacitatea lui de a înțelege orice problemă și pentru vastitatea cunoștințelor lui, dar și pentru grija cu care alegea cuvintele cînd prezenta o anumită temă.

Teofrast: Adineauri, cînd ați insistat asupra necesității de a determina principiile în fizică, ați ajuns la concluzia



Platon în grădina Academiei

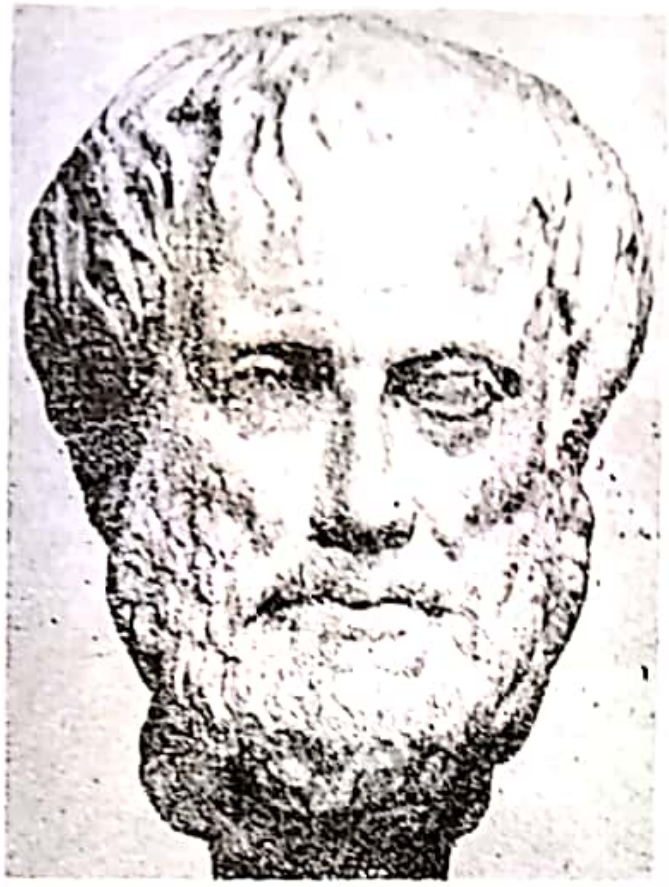
că, din punct de vedere filozofic, existența principiilor nu aparține fizicii. În această privință nu am nimic de obiectat. Dar, v-aș întreba, de ce atunci cînd ați discutat despre principiul fundamental al mișcării, n-ați lăsat să vă scape prilejul de a-i combate cu vehemență pe eleați și, ca săgeata să meargă și mai în plin, nu i-ați cruțat nici pe bieții cuadraturiști? (30). Uitați-vă la ei, cu cîtă pasiune continuă să se certe între ei, de parcă, de această problemă a cuadraturii cercului ar depinde toate treburile Atenei!

Aristotel: Te-a surprins, oare, că am afirmat despre cuadratura lui Antifon că nu-i geometrică și că, de aceea, nici nu-i demnă de a fi combătută de geometri? Aceasta te face să mă întrebi de ce i-am asmuțit pe sofiști?

Aristoxenos: Cum puteți admite ca prietenului meu Teofrast, să-i fi trecut prin minte un asemenea cuvînt

[1] Numele lui adevărat era Tyrtam dar Aristotel i l-a schimbat întîi în Eufrast, adică „vorbitor bun" și după aceea în Teofrast, adică „vorbitor divin".

Aristotel



vulgar : „asmuțit“? Tocmai acum cînd l-ați poreclit „Teofrast?“ N-aș fi obiectat dacă aceasta era pe vremuri, cînd îi spuneam Tyrtam sau chiar Eufrast !

Teofrast : Te credeam neam de privighetoare și nu de viespe, Aristoxene ! Cum se împacă observația ta de acum și încîntarea cu care-mi vorbești despre cîntecele bătrînești, despre originea și frumusețea lor?

Aristoxenos : Ia te uită : *neam de privighetoare* ! Ce legătură vezi tu între istoria muzicii și cîntare? Nu te contrazic, îmi place și să cînt, numai că lira sună mai melodios în mîinile tale, Teofrast, și tocmai de aceea îți prezint eu ție cîntecele mele !

Teofrast : Departe de mine această glorie, Aristoxene. Nimeni nu te întrece în măiestria cu care știi să polcești cîntecele tale !

Aristoxenos : Nu-ți dezminți deloc numele, Teofrast ! Ba ai atins și coarda ce a început să vibreze, fiindcă ador muzica și o consider ca unicul bun din viață.

Aristotel : Unicul bun, ai zis? Ei bine, mi-ai amintit de o întîmplare plină de haz, de pe vremea cînd audiam cursurile învățătorului meu, Platon. El a anunțat atunci că va vorbi despre bunuri și auzindu-se aceasta, auditorii

Teofrast

s-au îngrămădit mai mulţi decît de obicei, fiecare sperînd să afle vreo metodă deosebită prin care să obţină unul dintre bunurile rîvnite şi mai cu seamă avere. Dar Platon a vorbit despre numere, geometrie şi astronomie arătînd că dobîndirea acestor cunoştinţe reprezintă unicul bun din viaţă! Desigur că paradoxul i-a zăpăcit pe auditori şi unii dintre ei, considerînd că învăţătorul şi-a bătut joc de ei, au luat-o la fugă ! (31).

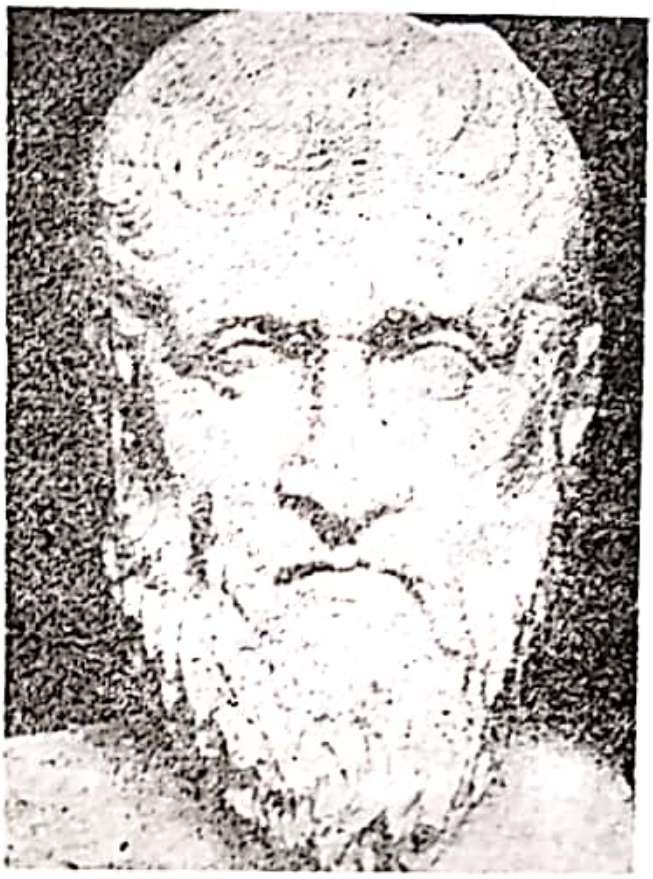
Eudem : Dar aşa trebuia să vorbească, bunul fiind căutarea, contemplarea şi posesiunea adevărului.

Aristoxenos : Sînt de părerea ta, Eudem, numai că eu în locul lui Platon, aş fi vorbit despre muzică şi nu de numere şi geometrie !

Aristotel : Ai fi avut, poate, şi mai mult succes dacă ai fi înlocuit argumentele cu melodii. Dar să revenim la problema cuadraturii cercului. Am impresia că şi Eudem ar avea ceva de cîrtit ! În timpul lecţiei am surprins cîteva fulgere de împotrivire scăpărîndu-i din ochi. Semn de nemulţumire, nu-i aşa, Eudem?

Eudem : N-aş putea spune chiar aşa, dar totuşi doresc să vă vorbesc !

Aristofan



Aristotel: Știu și aștept. Am citit și partea care ai scris-o despre istoria aritmeticii și vreau să-ți pun cîteva întrebări. Dar tare mă tem că altele sînt problemele ce te preocupă!

Eudem: E adevărat. Aș dori să discutăm, mai pe îndelete, această problemă a cuadraturii cercului pe care adineauri, nu numai că ați atacat-o, dar ați și năpăstuit-o!

Teofrast: De ce stîrnește oare atîta interes și are atîta popularitate această problemă? E deajuns să fie amintită că toți sar, gata să ia parte la discuție, chiar dacă nu înțeleg prea mult din ea!

Aristoxenos: Ceea ce-mi pare mai curios este că și acum 100 de ani era la fel de populară, fiindcă altfel n-ar fi adus-o Aristofan pe scenă! Parcă-l văd pe Meton, ajuns în orașul păsărilor, abia tîrîndu-și compasul și riglele uriașe, ca să se apuce să măsoare și să facă cercul să devină pătrat! (82).

Eudem: Săracul Meton! Cît s-o mai fi rîs atunci de el! Și, dacă te gîndești bine, nu o merita. Datorită lui avem azi un calendar care urmărește cu precizie drumul Soarelui...

Teatrul
Dionysos din Atena

Aristoxenos: Poate că nu-i drept că s-a rîs de Meton, dar de cuadraturiști, trebuia! De altfel, comediile lui Aristofan au rămas la fel de vii ca și atunci cînd le-a scris. Mie, cel puțin, îmi plac, deși știu că învățătorul nostru nu face haz de ele!

Aristotel: În privința lui Aristofan, voi sînteți cu toții sub influența lui Dicaiarh (33). De cînd a început să-i studieze opera, voi toți nu mai vedeți și nu mai gîndiți decît prin comediile lui Aristofan, mai ales tu Aristoxene, care-i ești prietenul cel mai apropiat! Nici eu nu-i neg talentul, dar îl detest! În această privință, i-am rămas credincios dascălului meu, Platon, care l-a privit pe Aristofan ca pe un poet preocupat să spună „numai lucruri hazlii" fără să se gîndească la consecințele acestor glume, pe care le considera ca „izbînda și deprinderea muzei lui" (34).

Aristoxenos: Ca și Platon, vă gîndiți desigur la *Norii*?

Aristotel: Da, fiindcă de la această comedie i s-a tras moartea lui Socrate. Consider că actul de acuzare contra lui Socrate nu a fost întocmit de Melitus și ceilalți doi tovarăși ai lui, ci de Aristofan, atunci cînd își implora

muza să adune cît mai multe caraghioslîcuri pe seama acestui neasemuit gînditor !

Aristoxenos : Dar Aristofan a exprimat doar părerea generală despre sofiști ! A folosit figura lui Socrate, fără nici o intenție funestă, ci numai fiindcă era cea mai populară !

Teofrast : Și eu sînt de părerea lui Aristoxene. Cînd a scris *Norii*, Socrate era la începutul carierei lui de filozof iar calitățile lui nu erau cunoscute decît de un mic cerc de prieteni. Pentru cei mai mulți, el apărea pe atunci ca o figură excentrică !

Eudem : Așa-i. Socrate a fost înțeles și admirat de-abia cînd Platon a scris *Apologia*. Circulînd din gură în gură, Atena a arătat astfel că s-a căit de greșeala pe care a comis-o.

Aristotel nu a mai răspuns. Ajunsese în fața locuinței lui și oprindu-se, s-a despărțit de Teofrast și Aristoxenos, spunîndu-le :

Aristotel : Am pus deoparte cîteva documente pentru voi, pe care vă rog să treceți spre seară să le luați. Sînt din ultimul transport trimis de bietul și dragul meu Callistene (35). Iar tu, Eudem, rămîi cu mine ca să ne răfuim !

Eudem cunoștea camera de lucru a dascălului său, mobila luxoasă, aleasă cu gust și bogata lui colecție de manuscrise, așezate de el însuși cu grijă, după un sistem imaginat anume în acest scop (36). Privea cu bucurie și încîntare florile ce se răsfățau în vase de preț și, lăsîndu-se cuprins de liniștea și armonia acestui interior, aștepta să i se vorbească.

Aristotel : Așadar, nici mai mult, nici mai puțin decît despre cuadratura cercului? Tot ce nu se leagă de acest subiect, să fie înlăturat !

Eudem : Cam așa ! Mai întîi, fiindcă am adunat și am restabilit unele rezultate despre care aș vrea să scriu, dar nu le pot da forma definitivă ce doresc să o aibă în istoria geometriei mele pînă ce nu le vom discuta împreună și apoi, fiindcă, după afirmațiile din dimineața aceasta, văd că nu trebuie să mai amîn această discuție...

Aristotel : Atunci e grav de tot ! Sînt acuzat și deci gata să te ascult cu toată atenția ! Vrei să o luăm chiar de la început, poate cu pitagoricienii, sau cu sofiștii?

Eudem : După cîte am putut stabili eu, pitagoricienii nu s-au ocupat de cuadratura cercului, cel puțin eu nu am găsit nici o urmă ! Cred că sofiștii au pus-o în discuție,

propunînd geometrilor să construiască un pătrat de arie exact egală cu a unui cerc dat, folosindu-se numai de riglă și compas.

Aristotel: Și eu cred așa, fiindcă tot ei au formulat și celelalte două probleme, la fel de curioase: duplicarea cubului și trisecția unghiului (37)! De altfel, sînt convins că și Anaxagora din Clazomene a cercetat problema. Întrebarea este: la ce rezultat a ajuns? Ai aflat ceva?

Eudem: Nu! N-am putut găsi nici o copie de pe lucrarea lui. Am trimis după ea chiar și în Lampsac, dar în zadar! Nu-s decît 100 de ani de cînd se spune că a fost scrisă și nimeni nu-mi poate da nici o referință exactă asupra ei.

Aristotel: Era un gînditor serios și în închisoare a avut destul timp să gîndească, poate că a stabilit vreo metodă ingenioasă, cine știe?

Eudem: Oare cum s-a putut pierde lucrarea? Să nu o fi distrus el singur, atunci cînd l-au scos din închisoare și l-au expulzat, ca să nu-i mai amintească de zilele acelea?

Aristotel: N-ar fi exclusă bănuiala ta, dacă te gîndești că a fost învinuit de ceea ce considera el că ar fi fost chiar *scopul vieții lui* (38)!

Eudem: Neavînd cum discuta procedeul lui Anaxagora, am să mă străduiesc să expun celelalte trei metode diferite prin care s-a încercat să se găsească latura pătratului de arie egală cu a unui cerc dat.

Aristotel: Trei? De unde, trei? Una este a lui Hipocrate din Khios, iar pe a doua o bănuiesc, după graba cu care ai ținut să-mi vorbești! Parcă văd că și tu ai de gînd să legi de aripile geometriei, carapacele de plumb, făurite de Antifon, fiindcă, după cît am înțeles, nici Teofrast n-a fost încîntat de felul în care m-am exprimat azi despre Antifon. Dar de unde ai scos o a treia metodă? Ai născocit-o tu însuți sau ai aflat-o de curînd?

Eudem: Ieri mi-a destăinuit-o un prieten sosit din Cnidos. Metoda a fost descoperită de fratele lui Dinostrat, care, fermecat de curba folosită, i-a dat și numele de cuadratrice, deși ea mai are și alte calități, de pildă, aceea de a reuși trisecția unghiului! [1]. Dar, toate la rîndul lor, așa că, dați-mi voie să mă întorc la Hipocrate. În lecția de azi dimineață ați afirmat că ar fi un sofism să stabilești

[1] Vezi nota 37.

cuadratura cercului cu ajutorul lunulelor[1] și totuși, ați admis că metoda lui Hipocrate este *geometrică.*

Aristotel: Desigur, fiindcă Hipocrate este un geometru priceput (39)!

Eudem: Ați afirmat, odată, ceva mai mult despre el, anume că era priceput numai în geometrie, pe cînd în toate celelalte era cît se poate de nepriceput!

Aristotel: Așa și era. La început, pe cînd se ocupa cu comerțul, vameșii din Bizanț l-au păgubit de mulți bani (40).

Eudem: Dacă paguba l-a îndemnat să studieze geometria, atunci cred că faima lui de geometru a compensat cîștigul ce l-ar fi avut, dacă vameșii aceia nu ar fi fost așa de hrăpăreți. Mă gîndesc la admirabilele lui *Elemente* de geometrie, la soluția pe care a dat-o în problema dublicării cubului și, în particular, la descoperirea lunulelor, descoperire pe care o consider de-a dreptul *senzațională*!

Aristotel: Recunosc că Hipocrate a fost un bun geometru, dar consider că tu te-ai înflăcărat prea tare. Înșiși geometrii au combătut demonstrația cuadraturii cercului prin aria lunulei și părerea mea este că au avut dreptul să o facă (loc. cit. 39)!

Eudem: Nu sînt de această părere, fiindcă Hipocrate nu a pretins că a reușit cuadratura cercului! Sînt convins că a intenționat să demonstreze aceasta, dar văzînd că nu poate reuși, s-a mulțumit să arate că există totuși anumite lunule avînd ariile egale cu ale unor pătrate (41).

Aristotel: Lunulele sînt figuri remarcabile, dacă ne gîndim la legătura lor cu cercul, dar de aici și pînă la identificare mai este mult. Văd însă că tu te mărginești să precizezi că numai la *anumite lunule* s-ar putea stabili cuadratura. Eu știam că unii geometri au afirmat că Hipocrate susținea că poate măsura *toate lunulele* prin pătrate!

Eudem: De aici începe și neînțelegerea dintre noi, căci geometrii care au afirmat aceasta, au generalizat, cu nepricepere, rezultatele lui Hipocrate. Generalizările lor nu corespund însă cu vederile lui Hipocrate și, de aceea, eu consider descoperirile lui Hipocrate valabile. Ca să vă încredințez, aș vrea să le cercetăm acum mai îndeaproape.

Aristotel: Nu mă opun. Poți trece, de altfel, peste prima propoziție care servește scopului, aceea că segmen-

[1] **Lunulele sînt figuri plane mărginite de două arce de cerc cu concavitatea îndreptată în același sens.**

tele de cerc asemenea au același raport ca și pătratele bazelor lor (42), fiindcă știi bine că o cunosc.

Eudem: Prima lunulă pe care o consideră Hipocrate are arcul exterior cît un semicerc (fig. 4). În el, Hipocrate înscrie un triunghi dreptunghic și isoscel $AB\Gamma$. Se for-

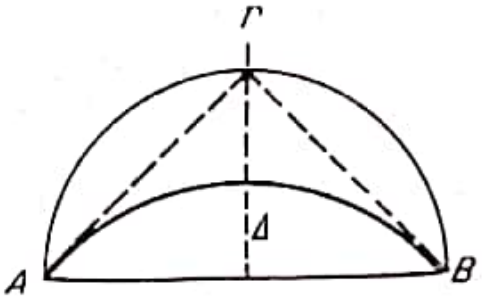


Fig. 4

mează astfel două segmente de cerc, $A\Gamma$ și ΓB, egale între ele, iar Hipocrate descrie pe baza AB a triunghiului un segment de cerc având ca arie suma segmentelor $A\Gamma$ și ΓB. În felul acesta, el a construit lunula $A\Delta B\Gamma$ care este cuadrabilă, fiindcă se scoate din aria triunghiului exact ariile celor două segmente situate deasupra catetelor lui, anume între aceste două catete și cerc. Or, dacă aria lunulei $A\Delta B\Gamma$ este egală cu a triunghiului $AB\Gamma$, atunci ea poate fi făcută egală și cu un pătrat. Și acum, iată metoda geometrică prin care se poate construi arcul de cerc $A\Delta B$ care mărginește partea de jos a lunulei (43).

Aristotel: Da, recunosc că demonstrația lui Hipocrate este geometrică. El a făcut cuadratura lunulei având ca margine superioară un semicerc, iar marginea inferioară un arc de cerc care este supus unor condiții precise și poate fi construit cu rigla și compasul, adică se poate stabili raza și poziția centrului cercului din care face parte acest arc.

Eudem: În al doilea caz, Hipocrate consideră o lunulă cu marginea exterioară mai mare decît un semicerc. Anume, el pornește de la un trapez $AB\Delta\Gamma$ (fig. 5) cu trei laturi egale între ele, iar cea de a patra, $B\Delta$, este în așa fel încît pătratul construit pe ea să fie de trei ori mai mare decît pătratul construit pe una dintre celelalte trei laturi, adică să existe relația $B\Delta^2 = 3AB^2$. Un asemenea trapez poate fi oricînd construit cu rigla și compasul, deci asupra lui nu avem de ce ne opri.

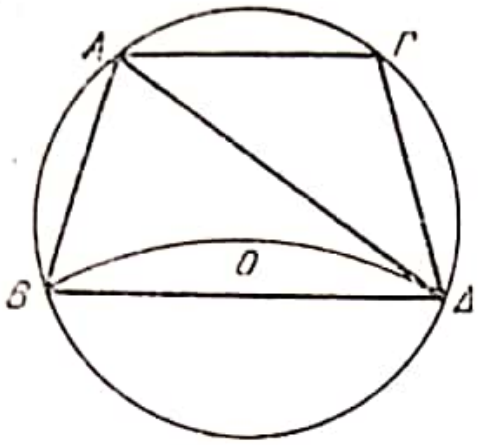


Fig. 5

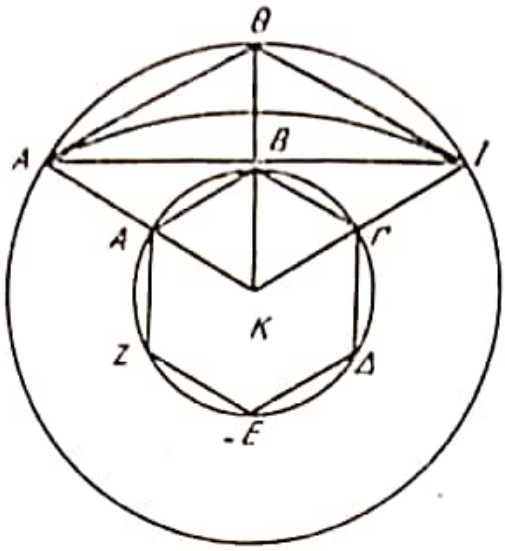


Fig. 6

Aristotel: Sînt de aceeași părere. Probabil că arcul exterior al lunulei va apare prin circumscrierea unui cerc în jurul trapezului.

Eudem: Exact! Se urmează aceeași metodă, ca să se determine forma arcului care unește punctele B și Δ astfel încît să se formeze lunula. Folosind o construcție geometrică potrivită, el găsește segmentul de cerc avînd ca bază latura $B\Delta$, de arie egală cu suma celor trei segmente de cerc, egale între ele, ce se formează între linia cercului și laturile egale ale trapezului.

Aristotel: Ai avut dreptate să spui că se urmează aceeași metodă căci, pe de o parte, din segmentul de cerc $BA\Gamma\Delta$ se scad ariile celor trei segmente de cerc egale și se obține astfel aria trapezului, iar pe de altă parte, lăsîndu-le la locul lor, dar scăzînd segmentul de cerc $BO\Delta$, egal cu suma celorlalte trei, apare aria lunulei ca egală cu aceea a trapezului.

Eudem: Mă bucură că sînteți de acord cu mine. Rămîne să trecem la ultima posibilitate de echivalare dintre aria unei lunule și a unui pătrat, de data aceasta fiind vorba de ceva și mai interesant, fiindcă se poate găsi un anumit cerc care adunat cu o anumită lunulă conduce la o figură liniară [1]. Iată-l: Consider două cercuri concentrice așa fel ca pătratul construit pe diametrul cercului exterior să fie de 6 ori mai mare decît acela construit pe diametrul

[1] Adică egală cu aria unui poligon.

cercului interior (fig. 6). Acum, dacă în cercul interior se înscrie hexagonul regulat $AB\Gamma\Delta EZ$ și se prelungesc razele KA, KB, $K\Gamma$, pînă la cercul exterior (44), atunci suma dintre aria lunulei $A0I$ și a cercului interior este egală cu suma dintre aria triunghiului isoscel $A0I$ și a hexagonului $AB\Gamma\Delta EZ$ înscris în cerc. Sper că totul este cît se poate de limpede și mai ales că aceste demonstrații își merită locul în istoria geometriei mele.

Aristotel: Demonstrațiile pe care mi le-ai arătat sînt, în adevăr, geometrice, dar totodată și înșelătoare! Aș vrea să te întreb dacă Hipocrate a stabilit, *printr-o construcție geometrică*, și mărimea laturii pătratului de arie egală cu a vreuneia dintre lunulele sale cuadrabile?

Eudem: Nu, asta nu o face dar nici nu consider că ar fi esențial. Pentru mine *faptul esențial* și *surprinzător* rămîne acela că Hipocrate a dovedit că există lunule, adică figuri mărginite de două arce de cerc neegale, care au aceeași arie ca și o figură rectilinie. Asemenea adevăruri merită să fie luate în seamă și mie mi-au făcut o nespusă bucurie meditînd la ele!

Aristotel: Am simțit plăcerea ta vibrînd în toate cuvintele ce le rosteai. De altfel, să nu crezi că nu mi-au plăcut și mie. Dar aceasta nu mă poate împiedica să observ că Hipocrate *a redus doar* problema cuadraturii lunulelor de o altă problemă, analoagă acesteia, problemă care *rămîne însă nerezolvată*! Fiindcă Hipocrate dovedește că aria triunghiului este egală cu a lunulei, folosindu-se de *o arie comună*, pe care o ia dintr-o parte și o pune în altă parte, fără să-mi arate *cum se construiește* sau *cum se calculează* această arie pe care o folosește! De aceea, pentru mine demonstrațiile lui Hipocrate, deși geometrice, sînt numai niște atrăgătoare exemple de apagogie [1]. Cu totul altfel însă îl judec pe Antifon, care pornește de la premise false, iar silogismele lui sînt rele (loc. cit. nr. 39, 186 a, 6—7).

Eudem: Și totuși eu apreciez nu numai metoda imaginată de Antifon, dar și pe aceea a lui Bryson. Ba mai mult, cred că geometrii de mai tîrziu vor putea găsi că-i necesar să *se modifice principiile noastre* (45) pentru ca metodele lui Antifon și Bryson să aparțină geometriei.

---

[1] Raționament apagogic înseamnă raționament prin absurd.

Aristotel: Nu pot combate acest argument care are la baza lui viitorul, dar îți pot aminti de Evenus care considera că orice este necesar, este un act penibil (46).

Eudem: Aceasta nu-i totdeauna, ci numai atunci cînd forța care constrînge, ne împiedică sau ne reține de la ceva! În cazul de față, cred că necesitatea se va manifesta ca o forță indispensabilă dezvoltării ca, de exemplu, respirația la om (loc. cit. nr. 46).

Aristotel: Dacă și în demonstrațiile lui Antifon se află argumente tot așa de irezistibile ca acestea găsite de tine acum, atunci mă declar convins, fără să le mai ascult!

Eudem: Asta nu! Deși sînt sigur că nu vă voi convinge, vă rog să mă ascultați, fiindcă simt cu nevoia controlului.

Aristotel: Azi îți lipsesc argumentele convingătoare, dar te ascult fiindcă îți respect dîrzenia și îți admir munca. Așadar, iată-l pe Antifon, înscriind un pătrat în cerc și, cu ajutorul lui, împărțind arcele subîntinse de laturi în două părți egale, construind un octogon regulat înscris.

Eudem: Da, așa face (fig. 7). Procedînd astfel, nu respectă el oare principiile?

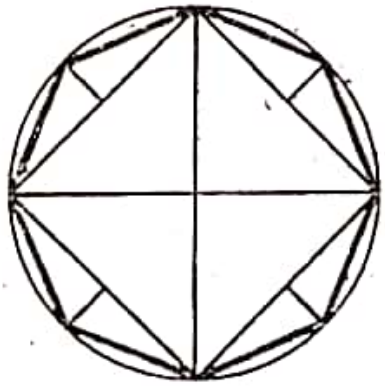


Fig. 7

Aristotel: Ba da. Și nu am să-i obiectez nimic chiar dacă, urmînd aceeași metodă, el înscrie în același cerc o figură cu 16, 32 sau 64 de laturi. Dacă vrei, merg și mai departe: îl las să se joace și să înscrie în cerc un poligon cu un multiplu cît de mare îți convine ție de laturi.

Eudem: Foarte bine. Ce s-ar întîmpla însă cînd, în loc să facă împărțirea arcelor de cerc în minte, ar încerca să o facă în realitate, pe figură? Oare, cînd numărul laturilor devine destul de mare, laturile poligonului înscris, ajunse suficient de mici, nu se așază chiar peste linia cercului, nimicind astfel suprafața segmentelor de cerc, determinate

de aceste laturi mai mici decît o împunsătură de ac și arcul respectiv de aceeași mărime?

Aristotel: Nemaipomenit de evident! Mai încolo, totul apare deslușit! Cum orice poligon se poate face un pătrat, iată că și cercul lui Antifon, înfățișîndu-se mai întîi ca un modest poligon cu un număr foarte mare de laturi, îți impune transformarea lui în cel mai autentic pătrat! Dacă ți se pare așa de genială demonstrația lui Antifon, mă mir că nu admiți, odată cu Zenon, că și săgeata lui stă pe loc, sau că Ahile nu poate ajunge broasca țestoasă? Cum se face că Zenon a avut mai puțină putere de convingere decît Antifon? A, da, știu de ce! Fiindcă te-a atras mai mult argumentul cu numerele pătrate și totodată ciclice (47)! Așa-i, cu asemenea argumente, ți-am mai declarat că nu pot lupta!

Eudem: V-ați înfuriat degeaba. Desigur că Antifon trebuia să folosească argumentarea sofiștilor, ca fiindu-i metoda lui proprie de gîndire. Dar, ideea aceasta a lui, de a se apropia de linia cercului prin poligoane înscrise în el și avînd un număr din ce în ce mai mare de laturi, o consider nu numai originală, ci și foarte naturală. De aceea, geometrii de mai tîrziu vor trebui să țină seama de ea chiar dacă cei de acum se îndoiesc de concluzia trasă de Antifon.

Aristotel: Mai tîrziu nu știu ce se va întîmpla, dar acum nu admit să se întineze puritatea gîndirii geometrice, coborînd-o în lumea simțurilor. Oare, și pentru tine, Eudem, ca și pentru Antifon, linia se îmbracă în materie și se identifică cu aceea pe care ai dus-o adineauri cu stiletul pe tăbliță? Căci altfel, cum poți admite că linia este formată din puncte? Dacă este adevărat că linia este un continuu și punctul un indivizibil (loc. cit. nr. 39, 261 b, 29), oricît de mică ar fi o dreaptă care taie cercul, ea îl va tăia mereu în două puncte și nu se va confunda niciodată cu un punct de pe cerc, pentru că este imposibil ca un continuu să fie format de indivizibili!

Eudem: Chiar dacă noi gîndim așa, mi se pare că principiile noastre despre punct și linie sînt artificiale și se depărtează de realitatea materială din care ele s-au desprins cîndva. În ideea lui Antifon întrezăresc tendința de a reveni la izvorul inițial. De altfel, metoda lui se acordă și cu principiul pe care l-a pus Eudoxus ca bază în noua lui teorie a proporțiilor!

Aristotel: Dar teoria lui Eudoxus este cu totul altceva! Și eu admit că dacă adaug mereu la o mărime finită va trebui să depășesc orice mărime dinainte dată și, la fel, dacă scad, trebuie să o pot face mai mică (loc. cit. nr. 39, VIII, 10, 266 b, 2). Dar aceasta se aplică la numere și nu la segmente, or, după cîte văd, tu începi să uiți că geometria studiază linia fizică numai în *ceea ce ea nu este fizică* (loc. cit. nr. 39, 194 a, 7—12) și că nici unei științe nu i se cere să dovedească ceva care este în afara subiectelor ei caracteristice! Oare, dulgherul și geometrul nu caută linia dreaptă în mod diferit? Primul, în măsura în care ea este folositoare pentru lucrul său, pe cînd celălalt, ce este ea și ce calități are (48). De aceea, după cum ți-am mai spus, consider că metoda lui Antifon nu-i geometrică. Cît despre Bryson...?

Eudem: Bryson din Heraclea pornește de la observația evidentă că aria unui cerc se află cuprinsă între acelea ale triunghiurilor echilaterale înscrise și circumscrise cercului (fig. 8), sau între ariile pătratelor înscrise și circumscrise lui (fig. 9).

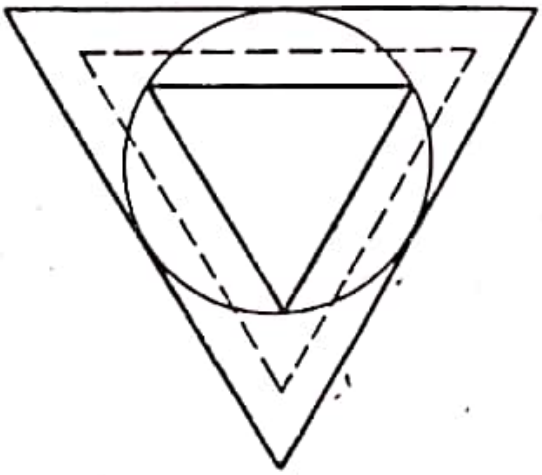


Fig. 8

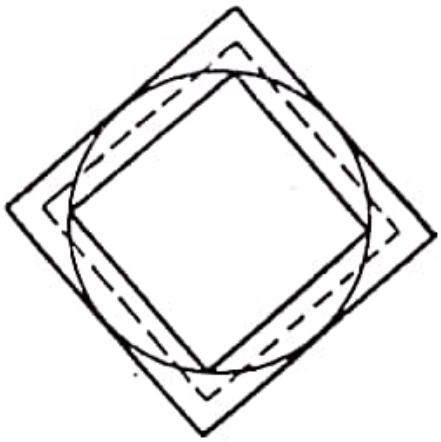


Fig. 9

Aristotel: Așa-i. Dar de aici nu rezultă, așa cum pretindea el, că triunghiul sau pătratul de arie egală cu media aritmetică a ariilor figurilor respective înscrise și circumscrise, ar reprezenta chiar aria cercului!

Eudem: Mai întîi, nu se știe dacă a fost vorba despre media aritmetică sau despre cea geometrică și apoi, dacă afirmația aparține lui Bryson sau urmașilor lui! Fiind din școala lui Pitagora, eu aș crede mai degrabă că Bryson

ar fi putut presupune că raportul dintre ariile acestor figuri să fie de aceeași natură cu raportul dintre latura pătratului și a diagonalei sale.

Aristotel: Mi se pare din nou curios că-l susții și pe Bryson, a cărui construcție nu-i decît un simplu paralogism [1]. Pe ce alteeva se bazează ea, decît pe o simplă afirmație?

Eudem: Insist asupra posibilității, sugerată de Bryson, de a stabili o legătură între aria cercului și ariile poligoanelor înscrise și circumscrise lui. Această idee cuprinde în ea o forță în stare să înfrunte și chiar să învingă principiile noastre geometrice!

Aristotel: Cu susținători ca tine, nu-i exclus! Așa stînd lucrurile, nu-i greu să prevăd natura metodei pe care ți-a mai rămas să o expui. Din cîte ai pomenit, trebuie să fie vorba de curba pe care a prezentat-o Hippias lui Platon, ori ea nu se poate construi cu rigla și compasul (49)!

Eudem: Ați ghicit, despre acea curbă va fi vorba, dar să nu uităm că Hippias a imaginat un instrument mecanic cu care o poate descrie tot așa de exact cum descrie compasul un cerc sau rigla o linie dreaptă! Și apoi, prin proprietățile ei excepționale, cred că această curbă merită tot atîta atenție ca și un cerc. De aceea, chiar l-am felicitat pe Dinostrat că a numit *cuadratrice* această curbă prin care a reușit cu adevărat cuadratura cercului.

Aristotel: Bine, bine! Amintește-mi te rog, caracterul ei (50).

Eudem: Consider pătratul $AB\Gamma\Delta$ (fig. 10). Cînd dreapta AB se rotește uniform în jurul punctului A, punctul B descrie arcul de cerc $B\Delta$. Să presupunem că dreapta $B\Gamma$ se deplasează uniform, paralelă cu ea însăși, în același timp cu dreapta AB și, în așa fel, ca ea să se suprapună peste $A\Delta$, odată cu AB. Aceste două drepte, aflate într-o poziție dată și reprezentate prin AE și $B'\Gamma'$, se taie în punctul P, care descrie cuadratricea. Proprietatea ei principală este că, ducînd din centrul A o rază oarecare APE, arcul BE este, față de arcul $BE\Delta$, în același raport ca și segmentul $IP = BB'$ față de BA. Așadar, atît arcul $B\Delta$ cît

[1] Paralogism înseamnă o eroare de raționament pornind de la premise neîntemeiate și făcută fără intenția de a induce în eroare (raționamentul cu intenția de a induce în eroare, se numește sofism).

și dreapta BA sînt împărțite în același raport de dreapta dusă din centrul A la punctul E, și anume:

$$\frac{\text{arc } BE}{\text{arc } B\Delta} = \frac{IP}{BA}.$$

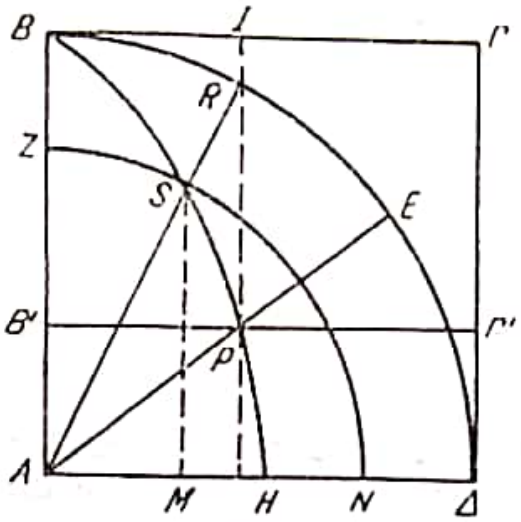


Fig. 10

Dacă notăm cu H punctul de intersecție al curbei cu $A\Delta$, atunci Dinostrat arată că și raportul dintre AH și $A\Delta$ este același ca și acela dintre $A\Delta$ și arcul $B\Delta$:

$$\frac{A\Delta}{\text{arc } B\Delta} = \frac{AH}{A\Delta}. \qquad (51)$$

Aristotel: Dacă am înțeles bine, Dinostrat susține că arcul sfertului de cerc $B\Delta$ este a patra proporțională între segmentele AH și $A\Delta$?

Eudem: Întocmai, și de aici avem: arc $B\Delta = \frac{A\Delta^2}{AH}$.

Luat de patru ori, iată calculată lungimea cercului!

Aristotel: Iar de aici înainte, nu mai apare nici un obstacol: cunoscînd lungimea cercului, aria pătratului cerut se construiește ușor, căci aria cercului este egală cu a unui dreptunghi a cărui bază este jumătate din lungimea cercului, iar înălțimea este jumătate din diametrul lui. Cred că ai băgat de seamă cu cîtă atenție te-am urmărit, dragă Eudem, însă lasă-mă să-ți spun că, pentru mine, nici de data aceasta, problema cuadraturii cercului nu a fost rezolvată. Fiindcă, dacă rigoarea matematică nu se cere în toate lucrurile, ea este necesară pentru acele lucruri care sînt fără materie și acestea sînt cele geometrice (loc. cit. 46, cartea II și III). Mi-ai vorbit despre punctul H cu o

siguranță care m-a uluit. Dar mi-ai putea, oare, arăta și unde se află el? Nu uita că atunci cînd dreptele AB și $B\Gamma$ se suprapun, *amîndouă și deodată peste* $A\Delta$, ele nu se mai taie într-un punct H, așa cum pretinde Dinostrat, ci se confundă pe toată întinderea lor (52).

Eudem: Aveți dreptate, dar să nu uităm că, înainte de a ajunge la această poziție finală, s-ar putea determina un punct H' situat în imediata vecinătate a lui H.

Aristotel: În acest caz, trebuie să renunțăm la geometric și să discutăm problema din punct de vedere *fizic* sau, dacă vrei, *mecanic*!

Eudem: Nu știu din ce punct de vedere ar trebui să privim problema, sau, mai bine zis, poziția punctului H, dar pentru mine raționamentul lui Dinostrat este cît se poate de limpede.

Aristotel: Limpede da, dar riguros? De ce se ocupă matematica dacă nu de ordine și măsură? Și cum poți măsura un segment cînd nu-i cunoști cu precizie extremitățile? Săraca geometrie! Era ca o pasăre măiastră, care se înălța către zările eterne și nemateriale ale gîndirii și iat-o, dintr-o dată, zbătîndu-se neputincioasă, cu plumbul lui Antifon pe aripi și cu lanțurile de fier ale lui Hippias și Dinostrat în jurul picioarelor!

Eudem privea tăcut la învățătorul lui care se plimba prin cameră cu pași repezi, vorbind iute și accentuînd fiecare cuvînt. Îi adora pînă și sunetul vorbelor nestăpînite, ca valurile mării cînd se izbesc de țărm, dar își păstra părerile lui. Deodată l-a văzut că se apropie de un vas cu flori și, după ce l-a privit cîteva clipe în tăcere, a ales un trandafir, l-a mirosit îndelung și apoi i l-a întins din cupa palmelor lui.

Aristotel: Demonstrațiile tale mi-au plăcut și merită să le scrii. Poate că m-ar fi încîntat, ca și pe tine, dacă nu le-aș privi din punct de vedere geometric. Dar acest lucru nu-l pot face. Tu vrei să introduci alte metode în geometrie, să dai un caracter practic, legat de simțuri. Pentru mine geometria rămîne însă ca această floare proaspătă și abia înflorită. O privesc și mă bucur de forma, culoarea și parfumul ei. Sînt mulțumit cu atît și nu-i cer mai mult. Cu totul altfel aș proceda cu un strugure de poamă. Și el este plăcut la vedere dar ca să beau vin, îl strivesc.

Eudem: Și totuși, cînd trebuie să cercetăm cuadratura cercului, nu văd alte căi...

Aristotel: *Trebuie*, zici? Dar de ce *trebuie*? Eu cred că avem libertatea să ne alegem subiectele de geometrie, în așa fel ca armonia ce rezultă din structura logică să ne desfete mintea întocmai cum ne desfată simțurile acest trandafir. Crezi că ar *trebui* să fi pus în acest vas, lucrat

Aristotel acuzat de impietate în fața Areopagului, se exilează din Atena împreună cu discipolii lui

cu atîta măiestrie, și niște spini culeși de pe marginea drumului, sau alte buruieni rău mirositoare?

Eudem: Eu nu văd în geometrie numai niște adevăruri logice și încîntătoare, deși teoremele ei sînt farmecul vieții mele. Cred că adevărurile geometrice nu formează numai un joc steril al spiritului, ci că ele sînt *cerute* de viața din jurul nostru, după cum și noțiunile pe care se bazează ele își au originea în această lume reală ce ne înconjoară. Abia mai tîrziu, cînd principiile geometrice s-au impus cu tiranie, făcîndu-ne să ne îndepărtăm de obîrșia lor, geometria a devenit obiect de încîntare. Dar lumea reală continuă să fie prezentă și să pună întrebări geometriei la care ea *trebuie* să răspundă. Gigantul Anteu, fiul Geei, căpăta puteri noi ori de cîte ori o atingea pe mama lui, Pămîntul. La fel și geometria, ca *trebuie* să se dezvolte și dacă principiile noastre de acum se vor opune progresului, ele vor apărea ca o formă învechită și mă tem că nu va fi altă cale de păsit înainte decît prin *sfărîmarea formei*.

V

SFĂRÎMAREA FORMEI

- „Cele mai importante descoperiri în matematică nu au fost legate de renunțarea la rigurozitatea științifică, ci de sfărîmarea formelor ei învechite și de punerea în concordanță cu cerințele vieții, cu practica".

S. A. Ianovskaia

Desigur că te-a uimit, dragă cititorule, atitudinea lui Aristotel față de Eudem și ai rămas cu impresia că „părintele logicii" a greșit neadmițînd că cercul poate fi privit ca limita spre care tinde un poligon regulat înscris de el, dacă numărul laturilor lui crește nedefinit. Nouă, aceasta ne apare evident, dar lui Aristotel, nu. El, întocmai ca și alți matematicieni de atunci, considera geometria ca și întreaga matematică, drept o creație abstractă a gîndirii, adică un capitol de logică bazat pe anumite principii arbitrare și de aceea a putut trage o concluzie logică greșită, pornind de la premisa falsă că un segment de dreaptă sau curbă se divide necontenit. „Pentru linie", scria el, „cel mai mic în cantitate rămîne doi, adică o linie și ca mărime nu există cea mai mică linie, căci orice linie se divide" (loc. cit. nr. 39, 220 a, 30). Bazîndu-se pe acest principiu, Aristotel nu putea privi linia ca formată din puncte, deoarece s-ar fi ajuns astfel la o concluzie contradictorie, anume, că linia care se împarte la infinit ajunge la puncte care, prin definiție, nu se mai pot divide. După cum vezi, Aristotel a aplicat principiul terțiului exclus, formulat, de altfel pentru prima oară chiar de el (53). Deși acest principiu logic nu poate preciza care anume dintre cele două judecăți contradictorii este adevărată și care falsă, el nu și-a pus această întrebare fiindcă nu ținea seamă de realitatea obiectivă și considera speculațiile matematice ca avînd mai mult un caracter filozofic. O afirmă el însuși în cartea lui, *Fizica*: „După ce s-a determinat în cîte feluri se înțelege natura, este bine să se examineze prin ce se distinge matematicianul de fizician. În adevăr, suprafețele aparțin corpurilor fizice, la fel și volumele, mărimile și punctele,

Euclid

care sînt obiectul studiilor matematice... Ar fi absurd ca fizicianul să vorbească despre figura Lunii și a Soarelui, întrebîndu-se dacă Luna sau Pămîntul sînt sferice sau nu, pentru că aceste atribute sînt obiectul speculațiilor matematicianului, dar nu în aceea că ele sînt fiecare limita unui corp natural, și dacă el cercetează atributele, nu o face că sînt atributele unei anumite substanțe... De aceea, el separă și, în adevăr, sînt separabile în gîndire, de mișcare..." (loc. cit. 39, 193 b, 22). Ca să-l înțelegi pe Aristotel și pe ceilalți matematicieni greci idealiști, trebuie să pornești de la punctul lor de vedere. Ei au eliminat, pe cît au putut, din raționamentul lor intuiția, urmărind să obțină astfel un aparat logic formal și bine închegat. Acest aparat a servit, de altfel, în veacurile următoare, drept model de gîndire științifică. Ei nu au căutat să stabilească *toate* proprietățile reale ale figurilor geometrice, ci numai pe acelea care le apăreau într-o formă simplă și elegantă din premisele puse de ei. De aceea s-au limitat numai la construcțiile cu rigla și compasul, căci în ele aflau armonie și o frumusețe aidoma aceleia exprimată în artele lor plastice. Tot ce li se părea paradoxal era înlăturat din domeniul cercetărilor lor, de pildă, problema cuadraturii cer-

Euclid prezintă *Elementele* sale de geometrie lui Ptolemeu I Soter, rege al Egiptului

culuí sau altele, în soluția cărora rigla și compasul nu le era de nici un ajutor. Cît privește mișcarea, nici studiul ei nu avea ce căuta în geometrie (ci numai în fizică), deoarece ea exista numai în lumea simțurilor ; înșuși Zenon arătase în paradoxul săgeții destulă iscusință ca să-i nege existența. Desigur că unii dintre geometrii de atunci nu au respectat aceste îngrădiri, căci vedeau în geometrie o știință vie, în continuă devenire, care folosește logica doar ca un instrument de cercetare și care nu poate progresa decît dacă principiile ei sînt conforme cu realitatea obiectivă. Sesizînd posibilitatea de a lega geometria de mecanică sau cinematică, ei au studiat și alte curbe — gromice sau mecanice, — considerate ca urme lăsate de un punct ce execută o anumită mișcare definită în mod mecanic și au privit punctul ca provenind din intersecția a două linii. De partea acestor geometri progresiști se găsea și Eudem atunci cînd a protestat contra principiului pe baza căruia linia era privită ca un continuu, sau cînd a admis curbele ce se puteau construi în mod mecanic. În *Elementele* lui Euclid (54), carte unde sînt adunate și sistematizate cele mai de seamă cunoștințe matematice obținute pînă în veacul al IV-lea î.e.n., principiul continuității liniei a fost

complet înlăturat. Teorema a II-a din cartea a XII-a, formulată de Hipocrate: „Cercurile sînt între ele ca pătratele diametrelor lor", a fost demonstrată de Euclid prin metoda lui Antifon și aplicarea principiului lui Eudoxus nu numai la numere, ci și la segmente de dreaptă (55). Cîțiva ani mai tîrziu, Arhimede (56) a considerat cercul (și alte linii curbe) drept limita către care tinde o linie poligonală înscrisă sau circumscrisă lui, atunci cînd numărul laturilor se mărește nedefinit și *a avut curajul* să calculeze, în acest fel, aria aproximativă a cercului. Poate că iar te prinde mirarea și te întrebi, de ce spun că *a avut curajul*? Ce inamic putea să înfrunte *geometrul Arhimede* considerat și azi ca unul dintre primii matematicieni al lumii (57)? Ei bine, află că acest inamic exista, el era opinia publică sau, mai precis, tradițiile păstrate de matematicienii idealiști din timpul lui. Arhimede a avut de luptat contra acestor păreri retrograde, printre care amintim și de aceea care separa matematica teoretică de cea practică [1]. Că pe atunci această separare exista, o arată chiar *Elementele* lui Euclid. În nici una din cărți nu se arată cum să se calculeze *aria* unei suprafețe, — aceasta aparținea de „geodezie" adică de *geometria practică* —, și nici nu se găsește vreun exemplu de *calcul numeric*, — și acesta făcea parte din „logistică", capitol cu totul deosebit de *aritmetică* ce avea ca obiect *teoria numerelor*. Arhimede nu s-a sfiit însă să folosească rezultatele teoretice în vederea aplicațiilor practice. Cine nu a auzit de „principiul lui Arhimede", de „șurubul" lui ori de folosirea „oglinzilor parabolice" cu care a aprins flota dușmană, sau alte probleme de fizică ce apar ca aplicații practice ale unor probleme teoretice de matematică? Înainte de a-ți arăta care a fost contribuția lui Arhimede la problema cuadraturii cercului, trebuie să-ți atrag atenția cititorule, că el a dat pentru prima oară acestei probleme forma precisă și riguroasă sub care se va înfățișa ea de acum înainte. Ca să reușească acest lucru, a fost necesar să introducă *un principiu general de măsură* a întinderii corpurilor și a suprafețelor. Pînă la el, nu a existat decît o noțiune vagă de *măsură liniară*, transmisă din preistorie, noțiune care, după spusele lui Eudem, i-a determinat pe

[1] Matematica teoretică nu a putut fi pe deplin separată de cea practică, după cum ne pot dovedi cazurile lui Tales, Arhimede și Apollonius.

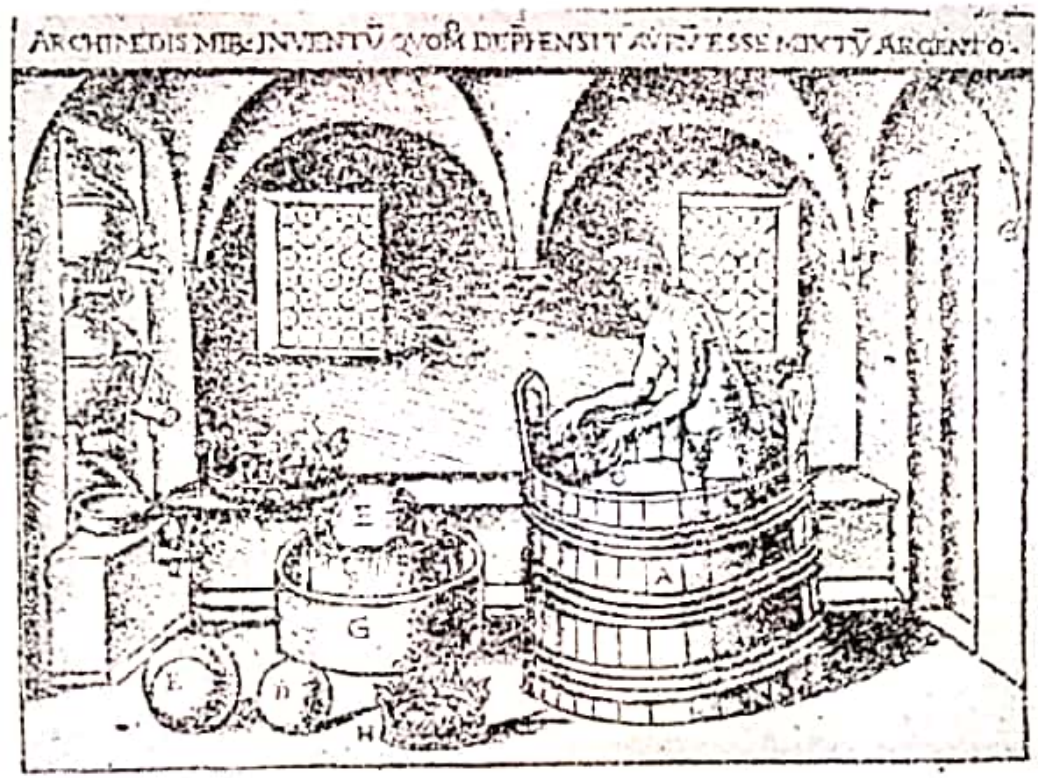
egipteni să creeze obiectul geometriei. Anume, se puteau măsura suprafețele figurilor plane mărginite de linii drepte, fiindcă orice poligon era descompus în pătrate, dreptunghiuri sau triunghiuri, iar acestea se măsurau cu ajutorul unui pătrat ce avea ca latură unitatea (sau o anume subunitate) de lungime. Această străveche metodă nu se putea aplica însă la măsurarea ariei unei figuri plane mărginită de o linie curbă sau mixtă și, cu atît mai puțin, la aflarea ariei unei suprafețe curbe sau a volumului închis de ea! Arhimede este acela care a stabilit cele dintîi metode generale, nu numai pentru a calcula ariile figurilor plane mărginite de linii curbe, dar și a ariilor sau a volumelor corpurilor mărginite de suprafețe curbe și, totodată, a dat exemple specifice arătînd cum să se facă în mod practic asemenea determinări. Unul dintre aceste exemple practice este și cuadratura cercului tratată de Arhimede prin toate cele trei metode care au fost respinse de Aristotel, atunci sînd i le-a expus Eudem. Îți amintești, cred, că Hipocrate a încercat să dovedească faptul că anumite lunule sînt cuadrabile, adică ariile lor sînt echivalente cu ale unor pătrate (58)? Ei bine, Arhimede a mers mai departe! El nu s-a mărginit să dovedească numai *existența* acestor relații, ci a arătat, în mod efectiv, cum se calculează latura pătratelor de aceeași arie cu ale unor lunule date. Mai mult decît atît, el a mai arătat că *lunulele* nu sînt singurele exemple de suprafețe cuadrabile, că mai există și suprafețe, mărginite de alte curbe mai complicate chiar decît arcele de cerc, care au proprietatea de a cuprinde o arie egală cu a unui pătrat ca, de pildă, un segment de parabolă (59) a cărui arie a și calculat-o (60). Cît despre ideile lui Antifon și Bryson, Arhimede le-a înmănuncheat în mod genial transformîndu-le într-o metodă generală de determinare a ariilor pe care nimeni, pînă în vremurile noastre, nu a depășit-o (61). În ce privește concepțiile lui Antifon și Bryson, Arhimede le pune la baza metodei sale de determinare, prin aproximație, a ariei cercului. Anume, el consideră două triunghiuri regulate, unul înscris și altul circumscris cercului și apoi mărește prin dedublare numărul laturilor acestor două poligoane: 6, 12, 24... pînă la 96, considerînd că prin aceste două poligoane cu 96 de laturi, unul înscris și altul circumscris cercului, lungimea și aria lui este destul de bine aproximată. Dar, ca și în cazul precedent, Arhimede nu se oprește aici, ci *calculează efectiv*,

Arhimede

întîi lungimea laturilor acestor două poligoane în funcție de diametrul cercului și apoi perimetrele celor două poligoane între care se cuprinde lungimea cercului (62). Astfel, el arată că valoarea numărului π se află între limitele: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ sau, în notația zecimală, $3{,}140 < \pi < 3{,}142$.

Iată, dragă cititorule, că după încercări ce au durat cam un mileniu și jumătate s-a putut obține pentru aria cercului tot numai un rezultat aproximativ, iar în privința numărului π, a fost cucerită a doua zecimală exactă a lui, anume 4 în loc de 6, cît o considerau egiptenii sau 2, babilonienii ! Tradiția afirmă că atît Arhimede cît și ultimul mare geometru al antichității, Apollonius, ar fi ajuns să determine primele patru zecimale exacte ale lui π, dar aceste lucrări s-au pierdut (63). Arhimede nu a făcut cuadratura cercului cu rigla și compasul, dar metoda imaginată de el sugerează clar imposibilitatea acestei construcții. Totuși, drumul cuadraturiștilor nu a fost barat de aceste rezultate, pentru că Arhimede nu avea bagajul de cunoștințe necesar ca să poată *demonstra imposibilitatea de a construi pătratul căutat*,

cu rigla și compasul. Mijloacele care vor sta la baza acestei demonstrații urmează să se înfiripe treptat, în timpul altor două milenii. Arhimede a mai pus în evidență și frumusețea metodei lui Dinostrat, adăugînd la cuadratricea lui o altă curbă cuadratrice. De fapt, ca și în cazul înaintașului

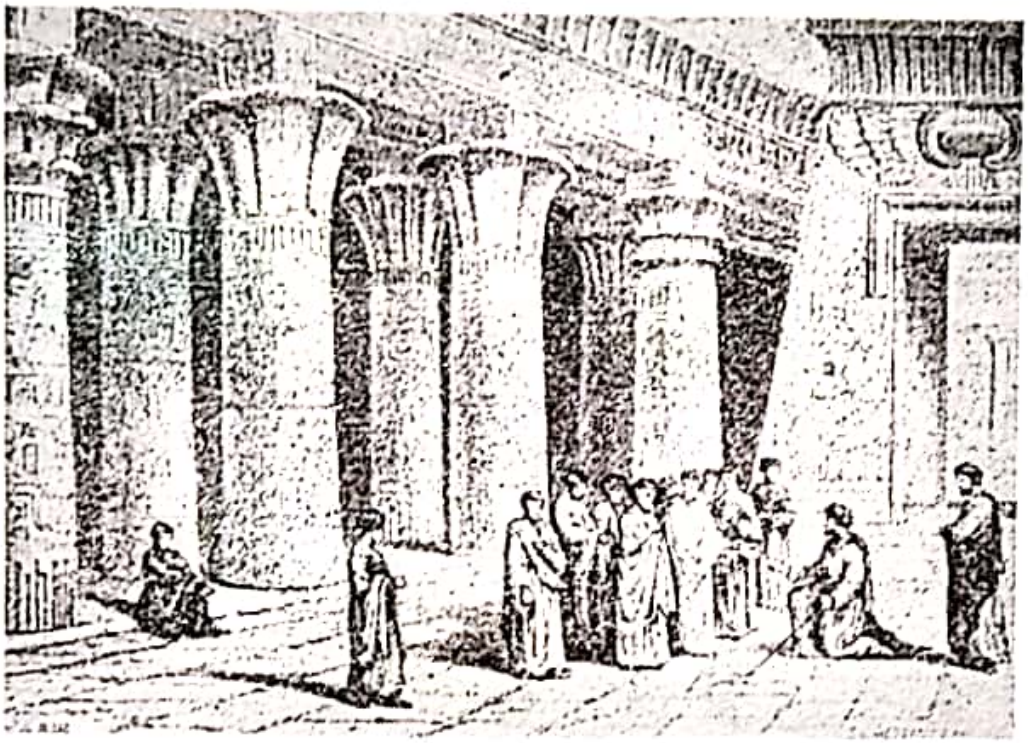


Arhimede și descoperirea
fraudei bijutierului

său, curba fusese descoperită mai dinainte de către prietenul lui, Conon din Samos, dar Arhimede a fost acela care a văzut proprietatea ei de a fi cuadratice. Azi, această curbă poartă numele de „spirala lui Arhimede" și exact ca și cuadratricea lui Dinostrat, nu poate fi construită cu rigla și compasul [1] (64). În schimb, se poate stabili în mod *teoretic*, că există un arc al acestei curbe, a cărui lungime este *exact egală* cu latura pătratului echivalent cu un cerc dat. Asemenea proprietăți ale curbelor cuadratrice l-au impresionat într-atîta pe filozoful francez Malebranche, încît a scris despre ele așa : „Liniile pot prezenta imaginației mai multe lucruri decît mintea, pentru că ele pot ex-

[1] Într-o formă aproximativă, spirala lui Arhimede se poate construi din arce de cerc concentrice, folosindu-se în acest scop 2, 3, 4 sau chiar 8 centre diferite.

prima raportul mărimilor incomensurabile, adică al mărimilor al căror raport nu-l putem cunoaște din cauză că nu au o măsură comună prin care să fie posibilă compararea lor".

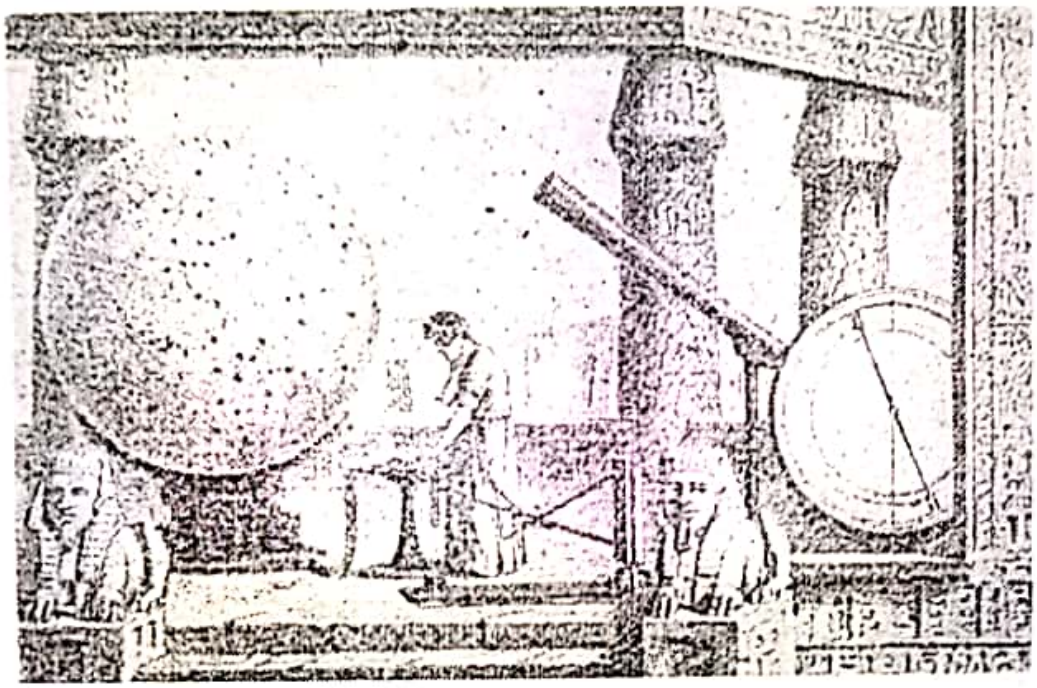


Apollonius în Muzeul din Alexandria

După ce Alexandria a fost cucerită de romani, interesul pentru problemele subtile ale matematicilor a scăzut cu totul. Lucrările lui Arhimede și Apollonius au încheiat astfel epoca marilor descoperiri matematice grecești. Cauzele decăderii care urmează pot fi căutate și în transformările din situația economică și politică a monarhiilor elenistice care protejau și încurajau dezvoltarea științelor și a artelor, transformări care au intervenit prin supunerea lor de către romani. Deși romanii nu au neglijat aplicațiile practice ale matematicilor, ei nu au avut nici un fel de afinitate pentru studiul lor și nu au adus nici o contribuție originală în acest domeniu (65).

În cartea lui Vitruviu, una dintre cele mai de seamă lucrări cu caracter științific ale romanilor, scrisă pe la începutul erei noastre, se afirmă că „raportul dintre lungimea cercului și diametrul său este 3". Iată dar, că Vitruviu, celebru arhitect roman din secolul I î.e.n., cunoștea mai bine valoarea pe care o foloseau egiptenii cu 2 000 de ani în urmă decît aceea pe care o determinase Arhimede, nu-

mai cu 200 de ani înainte ! Pînă la începutul veacului al V-lea, cînd Imperiul roman de Apus a căzut definitiv sub stăpînirea popoarelor migratoare germanice și slave, nu a mai fost scrisă în Europa nici o carte unde să fie amintite descoperirile lui Arhimede despre numărul π. De-abia în



Ptolemeu în Observatorul din Alexandria

noua formă de cultură, care s-a concretizat odată cu apariția relațiilor feudale, se observă un oarecare interes pentru problemele matematice, însă nivelul lor corespunde cu nivelul scăzut al forțelor de producție. Chiar și mai tîrziu, în veacurile VI și VII, cît a dăinuit procesul de contopire dintre popoarele migratoare cu cele băștinașe, nu s-au ivit condiții prielnice pentru studiul matematicilor și, cu atît mai puțin, pentru cercetarea unei probleme particulare ca aceea a cuadraturii cercului ! În veacul al VII-lea, Carol cel Mare, el însuși neștiutor de carte pînă la 40 de ani, — în cortul lui păstrînd, alături de arme, și tăblița de scris pe care se chinuia să întruchipeze literele —, a hotărît să înființeze școli pe lîngă mănăstirile existente, încredințînd bisericii conducerea lor. Nici nu s-ar fi putut altfel, fiindcă pe atunci întreaga activitate culturală se desfășura în mănăstiri. Acolo se scriau nu numai operele religioase, dar și letopisețe sau lucrări literare și tot acolo se copiau operele autorilor antici (66). În școlile nou înființate, printre obiectele de predare, era prevăzută și geometria lui Euclid. În

Carol cel Mare și Alcuin

realitate, nu era vorba de un studiu sistematic al acestei opere, ci numai de prezentarea unora dintre enunțurile celor mai elementare teoreme din geometria plană, căci nici unul dintre profesorii de atunci sau din veacurile IX, X și chiar XI nu ar fi putut demonstra măcar teorema cu privire la suma unghiurilor dintr-un triunghi. Pe atunci nu se mai știa ce înseamnă „un unghi interior" sau „un unghi exterior" unui triunghi (67). Cunoscutul cercetător al istoriei matematicilor, Paul Tannery, care a găsit și publicat multe dintre scrisorile schimbate în timpul acela între „savanții" care încercau să se lămurească între ei asupra sensului cuvintelor tehnice folosite în geometria lui Euclid și transmise prin tradiție, a ajuns la următoarea concluzie: „Acesta nu-i un capitol din istoria științelor, ci un studiu despre neștiința din epoca anterioară introducerii matematicilor arabe în Occident" (68). Totuși, printre acei profesori se distinge figura lui Gerbert (69) autor al multor lucrări științifice și filozofice și, în particular, al unei geometrii. Asupra valorii lui π, în manuscrisele de atunci se

găsește valoarea stabilită de Arhimede $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, dar nimeni nu mai știa că aceasta era o valoare aproximativă a lui π și nici cum se ajunsese la ea.

Dealtfel, nici în Bizanț, — centrul culturii eline după ce Alexandria a fost cucerită de către musulmani —, deși el depășea în domeniul culturii Europa occidentală, nivelul cunoștințelor matematice nu era cu mult mai ridicat. Spre sfîrșitul veacului al XI-lea, unul dintre cei mai străluciți savanți bizantini, Michail Psellos, autor al unui *celebru* tratat de matematici, afirma că cea mai bună metodă de a calcula aria cercului este aceea de a o considera „egală cu media geometrică dintre aria pătratului înscris și al celui circumscris" (Gino Loria: loc. cit. nr. 58, vol. I, p. 211). Dacă Psellos ar fi încercat să calculeze singur valoarea raportului dintre lungimea cercului și a diametrului său, folosind metoda recomandată de el ca fiind „cea mai bună", ar fi găsit pentru $\pi = \sqrt{8} = 2{,}82$, adică o valoare mai mică și decît aceea cunoscută din preistorie (70)!

Ca să urmărim istoria numărului π, rămîne să ne îndreptăm privirile tot înspre Europa occidentală, căci aici, cu toată atmosfera încărcată de fumul rugurilor ce se ridicau peste tot, geometria se reconstituia treptat, propoziție cu propoziție, de către cugetătorii progresiști îmbrăcați în haine monahale. Acest lucru ni-l dovedește cîteva dintre manuscrisele rămase de atunci. Printre acestea se află și unul tratînd despre cuadratura cercului, scris de magistrul Francon din Liège, un îndrăgostit de geometrie și, mai ales, de cuadratura cercului. Manuscrisul lui este deosebit de interesant pentru istoria matematicilor și de aceea a și fost retranscris și studiat. Din cercetarea lui se poate înțelege cît de adîncă era prăpastia care despărțea pe geometrii din evul mediu de cei din Grecia antică și cît de puternic stăpîneau superstițiile și obscurantismul mintea celor mai mulți oameni de atunci. Chiar și un simplu copist de manuscrise, dornic de cultură, tremura de groază la gîndul că ar putea comite un păcat transcriind anumite opere cu caracter științific. Francon, minte luminată, a închinat lucrarea sa despre cuadratura cercului unui episcop, probabil cu multă influență și pe care-l interesa problema. În felul acesta, el și-a ferit cartea de cei dispuși să arunce anatema peste orice fel de preocupări științifice.

Francon credea că a rezolvat problema cuadraturii cercului cînd, din cele șase cărți pe care le-a scris cu multă trudă, se constată că, de fapt, el nici nu a putut pătrunde în fondul problemei ! De aceea, nu m-ar mira ca, după ce ai cunoscut siguranța cu care-și afirma Eudem convingerile sale în discuția pe care a avut-o cu maestrul său, timidele păreri pe care le va exprima Francon în conversația cu prietenul său Falchalin, să-ți apară ca niște stîngace *dibuiri prin ceață*.

VI

DIBUIRI PRIN CEAȚĂ

„Istoria greșelilor spiritului omenesc este poate tot așa de importantă ca și aceea a progresului lui către adevăr".

Paul Tannery

Era la Liège, prin luna mai a anului 1050. De vreo trei săptămîni, Ramnulf scria mereu și nu ieșea din chilia lui decît atunci cînd suna clopotul pentru masă. Avea dezlegare și de la slujbele bisericești, fiind zor să se termine cartea dedicată arhiepiscopului Herman din Colonia. Ramnulf copia cu o deosebită grijă și atenție această lucrare care cuprindea probleme foarte grele de geometrie. Conținutul însuși fiind podoabă de preț, el nici nu mai folosea, ca altă dată, cerneluri diferit colorate, ori aur și argint ca să împodobească literele de la începutul capitolelor, ci numai cerneală roșie pentru titluri, care anunțau cuprinsul în felul următor: „Începe introducerea la cartea întîi a domnului Francon despre cuadratura cercului", sau: „Introducerea cărții a doua" și așa mai departe, pînă la cartea a șasea (71). Cînd a terminat de copiat ultima filă, a simțit o tulburare neînțeleasă. De aceea, nu a mai stat să șteargă penele și să închidă călimările, ci a înfășurat degrabă foile într-o pînză, le-a ascuns sub haină și a pornit în grabă printre coridoarele reci și întunecoase. Cînd a ajuns la chilia magistrului, inima îi bătea în coșul pieptului ca limba unui clopot. S-a oprit să se liniștească, dar ușa s-a deschis, pe neașteptate, și, din cadrul ei, magistrul Francon îl privi surprins.

— Ce faci aici, frate Ramnulf? Te rogi să se dea ușa singură în lături, ca apele în fața lui Moise? l-a întîmpinat magistrul, zîmbindu-i. Dacă-i așa, poftim de intră.

Făcînd o plecăciune, Ramnulf a pășit înăuntru fără să spună nici un cuvînt. Pe fața încă de copilandru, cu gura

ușor întredeschisă, Francon citea bucuric și de aceea a continuat să-l necăjească :

— Ce s-a întîmplat? Ochii tăi îmi spun că nu ai vărsat cerneala pe pergamentul gata scris și nici că lumînarea a căzut din sfeșnic și l-a ars. Atunci, ce te-a mînat la mine cu sufletul la gură?

Continuînd să tacă, Ramnulf desfăcu pînza și a așezat manuscrisul pe masă. De data aceasta Francon a rămas fără glas. Cerneala proaspătă dădea relief și viață literelor înșirate regulat pe filele de pergament. Le auzea parcă murmurul în timp ce ochii urmăreau textul. Stăpînindu-și emoția, a spus :

— Da, frate Ramnulf, l-ai scris foarte frumos. Literele sînt clare, curate și nu dovedesc grabă. Eu mă gîndeam că de-abia pe cealaltă săptămînă va fi gata. Ce te-a zorit? Curiozitatea sau poate frica?

— Amîndouă la un loc, a răspuns vesel Ramnulf. E drept că pînă nu am scris ultimul cuvînt, curiozitatea nu m-a iertat o clipă. Fiind una dintre problemele secrete, vroiam să aflu mai repede taina pe care Aristotel a adăugat-o, așa cum ați scris dumneavoastră, la categoriile sale și de la el s-a transmis apoi pînă la Boethius ! Scriam și tremuram de dorință să cunosc acea taină uitată după dispariția lui Boethius, atunci cînd știința a slăbit de tot, din cauza nesiguranței care domnea, în așa măsură și așa de mult, încît au dispărut toți cunoscătorii ei din Italia, Franța și chiar din Germania (72) !

— Da, da, veșnica tentație a fructului oprit !

— Dar vina este a dumneavoastră, a rîs din toată inima Ramnulf. M-ați ispitit încă de cînd mi-ați dat să copiez cele opt scrisori ce au fost schimbate între prietenul dumneavoastră, magistrul Radolf și răposatul Regimbold (loc. cit. nr. 69). De atunci, mi-e capul numai și numai la geometrie. Dacă vreți să știti, din lucrarea pe care am scris-o acum, mi-au rămas în minte pagini întregi, cuvînt cu cuvînt. Ca să mă credeți, vă spun pe sărite din ea, de acolo de unde am să deschid manuscrisul ! Vedeți, la cartea a IV-a ! Ea începe așa : „Dintre toate figurile egale, căci despre ele este vorba, unele sînt de aceeași formă, iar altele sînt deosebite. Sînt de aceeași formă un triunghi și un triunghi, un pătrat și un pătrat, un cerc și un cerc. Sînt deosebite însă triunghiul pe pătrat, sau triunghiul de cerc, sau, tot așa, pătratul de cerc. Triunghiul

Miniatură din *Practica geometriae* (manuscris din sec. XII). Una din femeile încoronate reprezintă astronomia. Ea ţine în mîna stîngă o planisferă şi cu dreapta arată cerul. Cealaltă reprezintă geometria şi ţine în mînă un rulou cu *Elementele* lui Euclid. Profesorul, reprezentat de un călugăr aşezat în fotoliu, taie acest rulou cu un cuţit şi dă o parte din el elevului său care stă mai jos pe o bancă.

are uneori un unghi obtuz şi două ascuţite, alteori are trei unghiuri ascuţite. Pătratul este însă totdeauna mărginit de patru laturi şi are tot atîtea unghiuri drepte. Figura cercului se deosebeşte şi de unul şi de celălalt, deoarece el nu are unghiuri şi se poate trage împrejur prin străbaterea unei singure linii. De aceea, asemenea figuri nu pot să primească o măsură comună şi nici nu se poate prinde cantitatea arici lor cu acelaşi compas. Din cauza aceasta, se întîmplă adesea să fie îndoială cînd se compară între ele, dacă cea de-a doua cuprinde tot atît spaţiu sau nu. Şi, în adevăr, nici nu se poate vedea că într-un pătrat şi într-un cerc s-ar putea afla tot atîta spaţiu, pentru motivul că acesta este cuprins în unghiuri drepte, iar celălalt se întinde într-un spaţiu mai liber, fiind strîns într-un gîtlej fără nici un unghi“ (loc. cit. nr. 71 a, p. 161).

— Opreşte-te că m-ai convins, frate Ramnulf. Ştii că ai o memorie fantastică?

— Îmi pare rău că nu mă lăsaţi să vă spun mai departe ! Ştiu şi toate demonstraţiile dumneavoastră pe dinafară, deşi unele erau aşa de grele încît nici nu le-am putut pricepe prea uşor. De altfel, singur aţi scris că aceste probleme

au obosit foarte mult pe înaintașii noștri, fiind lucruri pe care, studiindu-le te trec sudorile și că *ar fi o faptă de nebun ca într-o așa de mare greutate, să puteți făgădui o cunoaștere desăvîrșită* ! Aceste vorbe m-au mîngîiat și mi-am zis că dacă și celor cu multă știință de carte aceste probleme le par grele, de ce m-aș mai plînge eu, care acum le-am auzit întîi?

— Ai vorbit cu înțelepciune, frate Ramnulf și, dacă vrei să știi, află că și acum se mai agită multe chestiuni foarte grele și nelămurite despre unghiuri, în cercurile acelor învățați care se ocupă de geometrie, fiindcă nimeni nu poate spune, care cu care unghiuri se pot pune împreună !

— Da, știu, l-a întrerupt tînărul, continuînd plin de mîndrie ! Știu cîtă frămîntare produc asemenea probleme și nu se vor lămuri pînă ce nu vor afla cele ce ați scris dumneavoastră în cartea întîi despre *unghiul interior* ! Căci tocmai acest cuvînt, pe care-l folosește și Boethius cînd spune în *De cathegoriis* : „știm că suma unghiurilor interioare ale unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte" a pricinuit multă încurcătură ! În prima lui scrisoare către magistrul Radolf, răposatul Regimbold, nu a întrebat oare și el : „dacă într-un triunghi sînt unghiuri interioare, trebuie să fie și exterioare și atunci care sînt acestea"?

— Cum? Nici asta nu ai uitat? s-a mirat Francon, privind cu plăcere în ochii vioi ai băiețandrului.

— Cum aș putea uita așa ceva? s-a mirat acesta. Nici nu vă puteți închipui cît eram de fericit cînd copiam cele șase cărți despre cuadratura cercului gîndindu-mă la bogăția ce se află în chilioara mea !... Eu eram cel dintîi care aflam aceste lucruri minunate și secrete, cu le aflam mai înainte chiar de a le cunoaște acela căruia îi sînt dedicate (73) !

După cîteva clipe de ezitare, Ramnulf a continuat în șoaptă :

— Știți, numai cînd mă gîndesc cum sînt privite aceste cercetări, cînd văd cu cîtă îndoială dau din cap unii dintre prea cucernicii părinți, cînd aud cîte ceva despre aceste lucruri, numai atunci mă apucă și pe mine un fel de teamă, și chiar mă tem ! Desigur că nimeni nu îndrăznește să vă spună ceva dumneavoastră, fiindcă se știe cui o veți trimite (74), dar mie? De aceea, tare m-am bucurat că ați scris în *Introducerea la cartea a doua*, așa : „Dar poate că

cineva spune că preocuparea de știința geometriei este străină de societatea prelaților. Nu este de mirare că au fost unii care să judece astfel! Ei cultivă foarte puțin știința..." (loc. cit. nr. 71 a, p. 148).

— Chiar așa am scris? a întrebat Francon. Drept să-ți spun că am și uitat, însă ascultîndu-te mi-au făcut plăcere cele ce am spus, fiindcă am dreptate.

— Eu nu știu cîtă dreptate aveți, dar de bucurat m-am bucurat și eu; parcă prind mai mult curaj să pot înfrunta toate cîte le aud de la călugării ce sînt în trecere pe aici! Totuși, nu știu cum, dar poate că cele ce se povestesc despre Gerbert, fostul Papă al anului 1000, tot vor fi fost adevărate!

— Ce? l-a întrebat cu blîndețe Francon.

— Că și-a vîndut sufletul necuratului, ca să poată face știință!

— Cum poți crede una ca asta, frate Ramnulf? a continuat Francon pe același ton. Tocmai tu, care mi-ai mărturisit mai înainte că te-au interesat problemele de geometrie pe care le-ai copiat, și că te-au făcut fericit?

— E-adevărat și cu toate acestea... tot mă tem! Zilele trecute, la masă, l-am auzit pe părintele Leonis povestind niște lucruri de se zbîrlea părul în cap! Trebuie să fi fost adevărate, fiindcă le-a auzit chiar el, *cu urechile lui* pe cînd era tînăr, de la un călugăr ce l-a cunoscut pe Gerbert! Mă cutremur tot și acum, numai gîndindu-mă la ele, nici nu știu ce s-ar întîmpla dacă mi-ați cere să vi le povestesc!

— Nu-ți fie frică, fiindcă nici nu mă gîndesc să o fac! Am auzit și eu multe dintre poveștile acelea (loc. cit. nr. 74) dar nu m-am cutremurat deloc, din contra, m-am scîrbit și m-am întristat.

— Cum adică? Ați știut cele ce se povestesc despre acest papă nelegiuit chiar atunci cînd ați scris, cu atîta respect, despre el în cartea aceasta a dumneavoastră?

— Da, frate Ramnulf, și tocmai scriind așa, am vrut să șterg ceva din rușinea celor ce-l bîrfeau și încă îl bîrfesc! Fiindcă papa Silvestru al II-lea nu a fost un *nelegiuit*, cum ai spus acum, ci *un mare învățat*, ce i-a întrecut pe toți învățații din timpul lui prin mulțimea cunoștințelor ce le avea și mai ales prin patima cu care *căuta adevărul*! Știi de ce a fost un *nelegiuit*? Fiindcă a muncit cu rîvnă numai ca să aprindă o luminiță în întunericul ce-l înconjura pe el și pe cei din jurul lui! Ca profesor și ca

savant, succesele lui au atras invidia și ura acelora care nu aveau altă preocupare decît lăcomia și desfrîul. Pe cînd el topea metalele ca să facă din ele instrumente de socotit sau de cercetat cerul și schimba o parte din aceste instrumente pe cărți rare de știință, care altfel nu le-ar fi putut avea, acei călugări trîndavi îl acuzau de magie și au născocit toate minciunile cu care ți-a împuiat capul, ție și celor slabi de înger ca tine, un părinte Leonis și alții ca el! Dar, mai bine să nu mai vorbim despre aceste lucruri dureroase căci iată, aud bătînd la ușă!

Ramnulf s-a grăbit să deschidă și în prag a văzut pe magistrul Falchalin, prietenul lui Francon (75).

— Mă bucură vizita aceasta, fiindcă am să-ți dau o veste bună, l-a întîmpinat Francon.

— Așa, care? l-a întrebat Falchalin după ce a dat și el binecuvîntare fratelui Ramnulf, care și-a cerut voie să plece.

— Iat-o pe masă, a răspuns Francon.

Falchalin s-a așezat la masă și a început să cerceteze cu atenție manuscrisul. Francon urmărea mișcările degetelor lungi și fine care prindeau ușor cîte o filă, lăsînd-o apoi să lunece, ca o mîngîiere, peste celelalte. Cînd le-a petrecut cu privirea pe toate, musafirul a privit spre gazdă și, dregîndu-și vocea, a citit, cu o șăgalnică intonare a glasului: „Găsesc că este bine ca la sfîrșit să zugrăvesc cuadratura descoperită a cercului, în cîteva rînduleţe, ca în niște culori, pentru ca astfel, înarmată de noi împotriva tuturor piedicilor, să pară cît mai demnă să se prezinte în fața reverenței tale (loc. cit. nr. 71 a, p. 183 și 71 b, p. 232)“! Apoi, ridicîndu-se, a scandat, cu gravitate, cele opt versuri cu care se încheie lucrarea.

— Găsești că nu trebuie să pun aceste versuri? a întrebat Francon, intimidat ca un copil prins asupra unei fapte rușinoase. Am făcut-o fiindcă am vorbit, în *Introduceri*, de cîteva ori despre *Eneida*...

— Desigur, l-a zeflemisit cu drag Falchalin, răsfoind din nou manuscrisul. Iată și filele cu pricina. Aici, în *Introducerea* la cartea a treia, unde afirmi că arhiepiscopul nostru Herman este mai mare decît August, căruia poetul Vergiliu, vrînd să-l preamărească, a scris în cinstea lui cele 12 cărți ale *Eneidei*! Iar mai departe, în *Introducerea* la cartea a șasea, revii asupra acestui fapt și adaugi: „Acea celebră epopee a lui Publius Vergilius Maro, cel mai învățat dintre poeți, cîntă un lucru care nu-i decît o născo-

cire fantastică a imaginației poetice. În ea se povestesc evenimentele desfășurate timp de șase ani. Și pentru una și pentru alta a curs sudoare. Dar îți închipui tu oare de cît răgaz ar fi nevoie pentru a expune întreaga cuadratură a cercului (loc. cit. nr. 71 a, p. 172)?" Așa stînd lucrurile, găsesc că trebuia să împodobești și tu această epopee geometrică a cuadraturii cercului, cel puțin cu ritmul armonios al celor opt versuri !

— Văd că-ți rîzi de mine, a îngăimat Francon și poate că o merit ! N-am altă scuză decît că patima asta a versurilor izbucnește ca un vulcan, fără să-ți ceară îngăduință sau consimțămînt și în clipele acelea, gata, ești robul lor !

— Dar nu ai de ce te scuza, căci, lăsînd gluma la o parte, găsesc versurile tale destul de bine potrivite. Cred că ele mai slujesc și ca să împrăștie o anume bănuială ce plutește asupra acestei scrieri ! Ba, aș mai adăuga că am admirat și precauția pe care ai luat-o ca să înlături duhoarea ereziei, arzînd destulă tămîie pe altarul arhiepiscopului, în fiecare din cele șase *Introduceri*. Nu mă îndoiesc că *Înălțimea Sa* se va grăbi să o pună *sub înalta lui protecție*, cel puțin de dragul osanalelor pe care i le cînți ! Cît de măreț mai sună de pildă aceasta din *Introducere la cartea a IV-a*: „... după cum materia și instrumentul nu sînt în stare să facă nimic dacă nu sînt folosite de mîna meșterului... de aceea numai tu, podoaba pontifilor, ești cauza care se ferește a fi văzută, iar eu pot fi socotit, pe drept cuvînt, ca un instrument de care te-ai folosit tu, pentru executarea acestei opere... Oare, nu este autor acela care dă imboldul? Acesta este autorul ! Se spune, oare, despre muncitorii care au fost angajați cu plată la lucrări că ei ar fi întemeiat Roma?... Amintirea lor a fost ștearsă cu desăvîrșire, destul de curînd. Nimeni nu ar mai fi în stare să-și amintească cine a lucrat bolovanii pentru ziduri, cine a transportat pietrele, cine a făcut temeliile, cine a desăvîrșit acel zid... Așadar, dacă în această lucrare apare ceva care să merite recunoștință, aceasta nu se datorește decît ție, care prin ajutorul tău ai stimulat mintea mea leneșă și proastă... Dacă tu vei avea părere bună despre mine, nu mă tem că cineva ar putea face o apreciere rea asupra mea și, de bună seamă, atunci cînd raza glorioasei tale autorități va străluci asemeni Soarelui, va fi imposibil ca întunericul neștiinței să mai apară (loc. cit. nr. 71 a, p. 160)". Oprindu-se din citit, Falchalin a

izbucnit în rîs și, după ce s-a liniștit, a arătat înspre rîndurile citite, adăugînd :

— Tare mă mai tem de povestea cu muncitorii care au zidit Roma ! Ar putea să se ascundă în fraza aceasta un anume vînt potrivnic care să-ți împrăștie tot fumul de tămîie, măcar că l-ai amestecat cu strălucirea Soarelui !

— Drept să-ți spun că nu m-am gîndit la asta. Așa am simțit atunci și așa va rămîne, a răspuns Francon.

— Bine, te aprob și nici n-am să mai stărui în căutarea săgeților ca să nu mă îndepărtez de țintă, adică de problemele de geometrie prin care ai dezlegat cuadratura. De cîte ori nu ne-am certat amîndoi, pînă am căzut la împăcare, cu privire la înțelesul cuvintelor *unghiuri interioare și exterioare* ale unui triunghi? Și iată, cît de frumos este acum clarificată problema în *Cartea I* !

— Știu eu dacă nu au mai rămas dedesubturi? s-a întrebat, îngîndurat, Francon.

— Cred că ai făcut tot ce s-a putut, ținînd seama de lipsa noastră de cărți. Și mai cred că, fără a fi precizat noțiunile fundamentale nu s-ar fi putut ataca problema cuadraturii cercului, a cărei greutate nu au învins-o atîția învățați cu renume, printre care a fost și Gerbert, discipolul lui Adelbol, sau învățatul Wazo...

— Îți mai amintești de mulțimea argumentelor ce le strîngeam amîndoi ca să reușim să-l convingem de Radolf să renunțe la părerea pe care o susținea cu înverșunare contra aceleia a lui Regimbold?

— Știi, l-a întrerupt Falchalin, am venit acum, tocmai ca să-ți spun că am aflat, în mod sigur, că Regimbold nu a învățat la Chartres, așa cum credea Adelman. El a trecut pe acolo numai o singură dată, atunci cînd a stat de vorbă cu veneratul meu profesor Fulbert.

— Asta trebuia să se fi întîmplat înainte de a fi intrat eu la Chartres, a precizat Francon. Discutînd ei, atunci, această problemă, au convenit asupra faptului că unghiul interior unui triunghi este tot una cu unghiul ascuțit, iar unghiul exterior cu cel obtuz.

— Numai că nu s-au putut înțelege și asupra rațiunii acestor sinonimii !

— Era și destul de greu. Fulbert susținea că aceste cuvinte au același înțeles, pentru că perpendiculara coborîtă din vîrful unui unghi al triunghiului pe latura opusă

poate cădea, fie în interior, fie în exterior, pe cînd Regimbold considera că aceasta provine din compararea cu unghiul drept, a adăugat Francon (loc. cit. nr. 68, p. 92).

— Numai bunul nostru prieten Radolf, a reluat cu ironie Falchalin, susținea că drept unghi *interior* trebuie considerat un unghi într-o suprafață plană, iar ca unghi *exterior* acela de pe suprafața solidă, ca, de exemplu, un cub. Cum i s-a mai umplut fața cu broboane de sudoare cînd a înțeles că s-a înșelat ! Parcă-l aud cum tuna : „M-ați năucit amîndoi de cap ! Totuși ai dreptate, magistre Francon, și mă dau bătut" !

— A fost o greșeală a acelor oameni mari. Prin prestigiul lor, ei i-au împiedicat pe aceia ce considerau că un triunghi are unghiurile interioare egale cu două unghiuri drepte, să-și susțină părerea. Căci, dacă s-ar fi înțeles bine că, orice unghi interior sau exterior este numit așa după cum se află înăuntru sau în afară față de propria sa figură, atunci n-ar mai fi rămas nimic care să li se poată opune (76).

— De aceea am și accentuat eu că ai procedat foarte bine, punînd aceste explicații înainte de a-i prezenta cititorului faimoasa problemă a cuadraturii cercului ! Și ai mai făcut bine că i-ai arătat de la început, adică tot în *Cartea I*, că aria cercului se află înmulțind întîi pătratul diametrului cu 11 și apoi împărțind rezultatul cu 14 (77). Abia în *Cartea a II-a*, îi pui în față problema adevărată a cuadraturii cînd zici : „Dacă cineva ar voi să facă un pătrat, nu l-ar împiedica nici o greutate, dar dacă ar căuta să readucă pe unul din celelalte care se dovedesc de natura pătratului [1] la forma acestuia, nu are să ajungă niciodată la vreun rezultat".

— Exact, fiindcă aici întîlnim prăpastia de netrecut dintre metoda aritmetică și cea geometrică, a continuat Francon. Unele numere sînt prin ele însele pătrate, ca de exemplu 16 sau 25, altele însă pentru nici un cunoscător n-ar putea fi așezate între pătrate. Cum poți face numărul 50 pătrat, oricîte substituții ai încerca? Numai în privința

---

[1] Este vorba aici de găsirea laturii a a pătratului de aceeași arie cu a unui dreptunghi, de dimensiuni b și c. Soluția problemei este aflarea segmentului de lungime a egal cu media proporțională sau geometrică a segmentelor b și c ($a^2 = b \cdot c$), problemă pe care Francon nu o cunoștea și, de aceea, o credea imposibilă. Ea se află însă tratată în *Elementele* lui Euclid !

ariilor spațiilor acest lucru este posibil, căci nimic nu ne împiedică să găsim spații care să aibă forma unui pătrat și să cuprindă în sine măsura a trei picioare sau a 50 de prăjini (78).

— Acesta este și tîlcul vorbelor din *Cartea a III-a*: „În problema cuadraturii cercului ar trebui să ne pierdem curajul, dacă n-am fi ușurați prin ajutorul geometriei", a intervenit Falchalin care urmărea din nou textul din manuscrisul ce-l avea în față.

— În privința aceasta, am avut îndrăzneala să trag concluzii împotriva unor savanți ca Regimbold, Gerbert sau Racechinus, s-a fălit Francon. De ce nu au înțeles ei că *numai materia corpurilor nu se împotrivește de a deveni un pătrat*, pe cînd orice comparație care se naște prin împărțirea laturilor în părticele foarte mici te duce la numere? Te rog, arată-mi cum și ce ar trebui să adaug sau să scad, ca numărul 50 să devină pătrat? Uită-te la toate calculele pe care le-am făcut aici și verifică-le dacă n-ai încredere. Poți oare găsi numărul 50, ridicînd la pătrat, — așa cum susținea Regimbold —, mărimea laturii pătratului și încă $\frac{5}{12}$ din ea? (79)

— Ai dreptate, a răspuns Falchalin. Numai spațiile pot fi măsurate prin experiență, așa cum am făcut-o noi, de atîtea ori. Cîte figuri, tăiate din pergament sau din pielicele, n-am mai cîntărit atunci cînd ne străduiam să aflăm relația dintre aria cercului și a diferitelor pătrate sau patrulatere !...

— În adevăr, a zîmbit Francon amintirilor..., frumoase zile am mai petrecut împreună, tăind și cîntărind. Tu aveai mai multă răbdare decît mine la tăiat și de aceea figurile tale erau cele mai exacte. În schimb, eu păzeam cu strășnicie să nu ne înșele cumpăna. O verificam așezînd pe talgerele ei, de o parte cercul de diametru 14 iar de cealaltă parte patrulaterul cu laturile 11 și 14, tăiate din același pergament. Tare-ți mai plăcea să privești cum rămînea balanța în echilibru !

— Parcă numai mie? Cîtă bătaie de cap n-am avut cînd ne-a lipsit pergamentul și nu găseam pielicele de aceeași grosime peste tot ! Era tocmai cînd voiam să probăm că-și face echilibru cercul de diametru 28 cu patrulaterul de laturi 11 și 56 (80) !

— Numai prin aceste experiențe am putut găsi și transformarea reciprocă. Căci, în ce alt chip s-ar fi putut trece de la un pătrat la un patrulater și de la el la cerc, așa cum se întîmplă cu o masă de plumb, de aramă, de argint sau de aur, care se poate întoarce, cu lovituri de ciocan, la forma de la început, păstrîndu-și greutatea (81)?

— Spinoasă problemă și aceea, ca să-l poți pregăti pe cititor așa cum trebuie, a oftat Falchalin. Abia în *Introducerea la cartea a VI-a* ai putut demonstra egalitatea cercului cu a pătratului. Vreau să mai urmăresc odată cele ce urmează de aici înainte (82).

Francon și-a căutat de treabă prin chilie, lăsîndu-și prietenul în pace. Cînd a terminat, Falchalin s-a ridicat de pe scaun, a făcut cîțiva pași prin fața mesei și apoi s-a adresat lui Francon :

— Ambele metode cer o încordare extraordinară a atenției, ca să le poți urmări. Va bănui oare, prea înaltul tău cititor, cîtă putere, cîtă răbdare și cîtă sîrguință a cerut compunerea însăși?

— De ce? Îți închipui oare că Pitagora ar fi reușit să învingă greutatea de a cunoaște sunetele muzicale, dacă la zelul lui pentru cercetarea acestora nu și-ar fi înarmat sîrguința, examinînd cu atenție, timp îndelungat, sistemul de mînuire al ciocanului fierarilor (loc. cit. nr. 71 a, p. 172)? a întors-o, rîzînd, Francon.

— Cu cît mai ușor ți-ar fi fost dacă aveai la îndemînă și niște cărți potrivite !...

— Aici ai dreptate ! Cine știe ce idei mi-ar fi putut sugera scrierea lui Albinus, pe care a căutat-o cu atîta stăruință magistrul Radolf, sau acel *Podismus*, despre care tot el spunea că ar fi existat odinioară în biblioteca din Chartres. Dar unde vor fi fiind ele? Cînd l-am întrebat pe răposatul Regimbold, a ridicat din umeri. Nu-ți mai spun, a continuat cu melancolie Francon, cît aș dori să am cărțile lui Euclid ! Căci, dacă Aristotel s-a ocupat de această problemă, putea fi oare privită cu indiferență de ceilalți geometri greci de după el?

— Sînt convins că nu, numai că mă întreb la cine ar mai putea fi acum aceste cărți? Am auzit că maurii le-ar fi tradus în limba lor, dar cum să ajungi la ele? Nu vezi cîte se mai inventează pe seama lui Gerbert, fiindcă a fost în Spania și a adus de acolo cîteva cărți maurești?

— A adus, e drept, dar nu a adus cărțile lui Euclid fiindcă nu pomenește nimic despre acestea în lucrarea pe care a scris-o și i-a trimis-o lui Adelbold, după care am și eu o copie. Ei ! Cînd eram tînăr, visam să fug și eu în Spania, să mă travestesc în musulman și, după ce voi fi învățat bine limba lor, să pătrund și eu în școlile lor, așa cum a procedat și Gerbert, pentru care am o adîncă admirație. Dar eu n-am avut destul curaj ca să fac treaba asta.

— Ai făcut mai bine rămînînd aici, a spus Falchalin. Cine știe dacă, acolo fiind, nu te-ar fi descoperit vreun sarazin fanatic și nu te-ar fi spintecat pe loc, așa cum s-a mai întîmplat și cu alții ! Sau, dacă ai fi avut norocul să scapi teafăr, ar fi avut grijă scumpii noștri prieteni să te afume ca eretic. Nu vezi că bietul Gerbert nu are liniște nici în mormînt?

— Și totuși, a insistat Francon, Gerbert și-a putut potoli acea mistuitoare sete de a cunoaște. El a putut citi cărți din care a aflat atîtea lucruri necunoscute, după care tînjesc și eu. În mine însă, a rămas numai acest dor care-mi arde în suflet și nimic nu mi-l potolește. Un scump prieten de-al meu, cu darul scrisului, a compus o poezie despre un măr. Cînd mi-a citit-o am rămas înmărmurit fiindcă, fără să știe ce-i în sufletul meu, el a zugrăvit întocmai dorul ce mocnește în mine și care-i :

„Ceva ca dorul lanului uscat
ce plînge după apă,
ceva ca viermele verzui
ce-n fructele lui sapă...“ (*83*)

— În acest caz, nu te mai contrazic, a răspuns într-un tîrziu Falchalin, privind înaintea lui. E drept că numai acolo ai fi putut întîlni învățați care, dacă ar fi vrut, ți-ar fi putut vorbi despre multe dintre lucrările geometrilor greci ce au fost duse și se păstrează *în estul îndepărtat al Asiei.*

VII

ÎN ESTUL ÎNDEPĂRTAT AL ASIEI

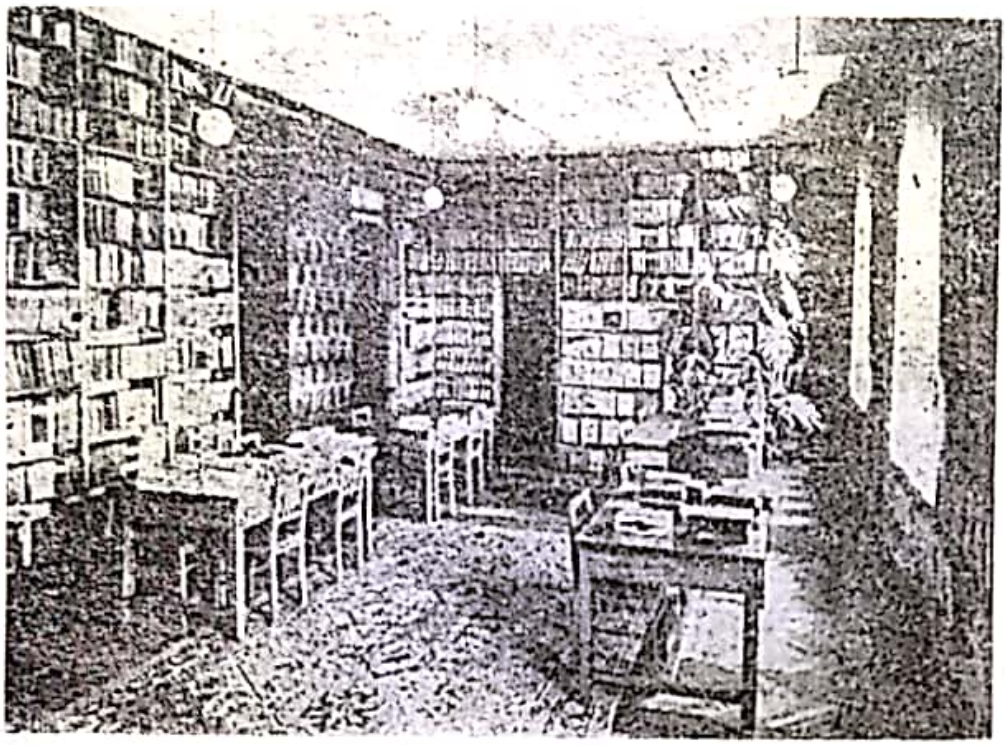
„Condiția fundamentală a oricărei descoperiri este o cunoaștere profundă și intimă a științei la care aparține subiectul investigației și cunoștințe suficiente din alte ramuri corelate cu acea știință".

Emanuel Bacaloglu

Îmi închipui, dragă cititorule, că dacă nu ți-aș fi arătat prin notele respective, chiar paginile cărții din care am tradus exact gîndurile lui Francon, ai fi considerat că această călătorie în trecut a fost înscenată după modelul acelora ale baronului Münchausen ! Cum ești înclinat să crezi că *Viitor* înseamnă *Progres*, nu te-ai fi așteptat ca după 14 veacuri, savanta convorbire despre cuadratura cercului dintre Eudem și Aristotel să degenereze într-o asemenea discuție care să fie, la rîndul ei, tot *savantă* ! O mare matematiciană din veacul al XIX-lea, Sophie Germain (84), bună cunoscătoare a trecutului acestei științe și avînd totodată înclinare înspre meditație, observa în una dintre scrierile ei filozofice că uneori științele : „asemeni oricărei ființe, cad din vîrsta maturității și a forței și pier prin slăbiciune". „Iar cînd renasc", își continua ea observația, „ele trec din nou prin copilărie". Cred că acele încercări ale geometrilor europeni din cursul evului mediu apar, pe drept cuvînt, ca manifestările unei noi copilării a geometriei, a cărei dezvoltare ulterioară va fi însă cu mult mai viguroasă decît cea de odinioară. Dar poate că, aluziile lui Francon cu privire la mauri te-au făcut curios să știi în ce stadiu se aflau pe atunci cunoștințele geometrice legate de cuadratura cercului prin alte părți ale lumii civilizate, de pildă în Asia și, totodată, poate să te întrebi ce s-a întîmplat cu întreaga comoară de cunoștințe geometrice acumulată cu atîta rîvnă și entuziasm de către matematicienii greci?

Ei bine, dacă vrei cu tot dinadinsul să afli răspunsul, te invit să mă însoțești chiar acum la Seminarul mate-

matic „Alexandru Myller" de la Universitatea „Alexandru I. Cuza" din Iași, unde vom răsfoi împreună cărțile și revistele ce ne interesează. Privind atîta amar de volume înghesuite pe pereții acestor camere ale bibliotecii să nu te înspăimînte cumva gîndul că ai avea de căutat acul în



Universitatea din Iași.
Seminarul matematic „Al. Myller"

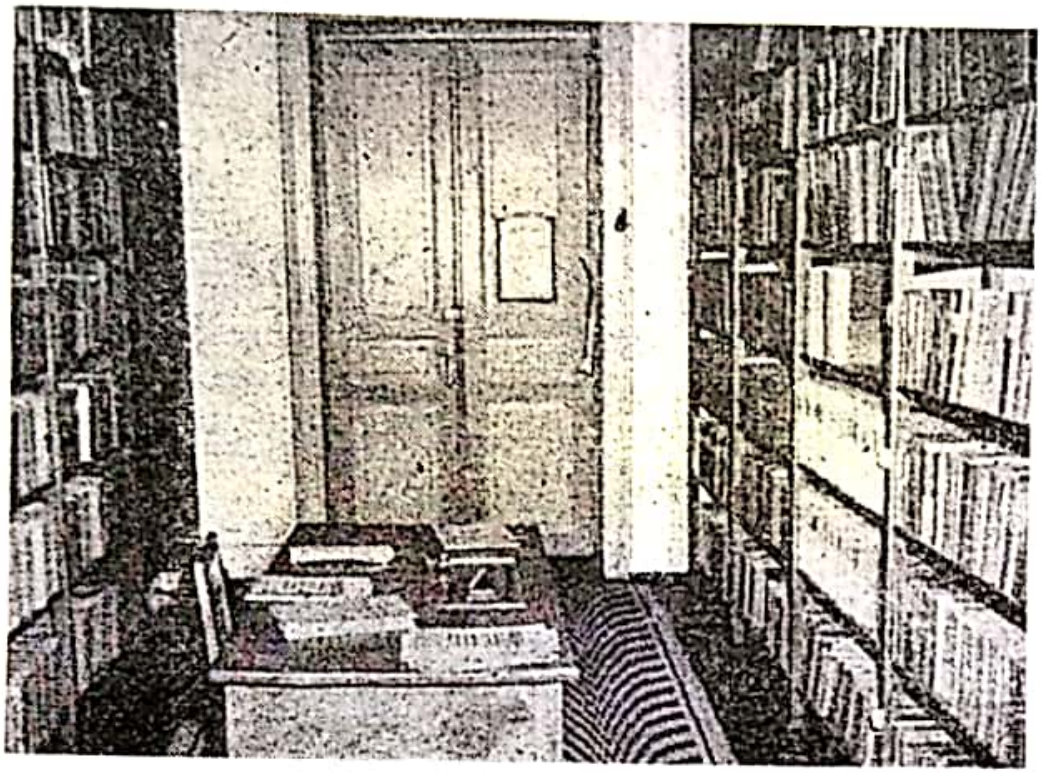
carul cu fîn ! Nu zic că, dacă te-aș lăsa singur aici, n-ai fi în stare să crezi că e totuna dacă vezi chiar aceste cărți sau colecțiile de reviste așezate în ordine cronologică și după țări, sau ai vedea numai o zugrăveală a lor, așa cum povestește Nicolae Filimon că procedau unii dintre ciocoii noștri de la începutul veacului trecut vrînd să-și dea astfel aere de intelectuali ! Fiind însă împreună, vei vedea că nu-i prea complicat să stabilești bibliografia unei probleme din istoria matematicilor. Mai întîi, din catalogul pe materii să căutăm cîteva tratate generale, să le notăm și să le luăm din rafturile unde stau așteptîndu-ne. Iată, aici avem una dintre primele cărți despre *Istoria matematicilor* apărută în epoca modernă. E veche, dar și acum, în multe privințe, a rămas foarte interesantă. A fost scrisă de J. F. Montucla pe la sfîrșitul veacului al XVIII-lea și aceasta este ediția a II-a, în patru volume mari ! În cel de-al IV-lea volum, dacă te uiți la *Note*, cea de-a treia se

referă chiar la istoria cuadraturii cercului. Vom folosi-o, fiindcă în ea sînt foarte multe istorii amuzante care te vor distra și, cine știe, te vor pune pe gînduri ! Multe alte lucruri vei afla și din volumele lui A. G. Kastner, Ch. Bossutt, M. Chasles, G. Libri, H. C. Zeuten, P. Tannery, H.

Universitatea din Iași, Seminarul matematic „Al. Myller"

Suter, S. Günther, H. Wieleitner, J. E. Hofmann, O. Becker, dacă vei căuta la tabla de materii, capitolele în legătură cu aria și lungimea cercului sau chiar cu cuadratura cercului. Dar încă nu am deschis cea mai vastă lucrare de prezentare cronologică a istoriei matematicilor, anume cele patru volume, în același format ca și acelea ale lui Montucla, publicate începînd din 1880 de către M. Cantor. Avînd în vedere că, deocamdată, ai vrea să cunoști doar evenimentele pînă în veacul al XI-lea, te poți mărgini numai la primul volum pe care, după cum vezi, scrie: „Din cele mai vechi timpuri pînă la 1200". Dar nu fi îngrijorat, cu aceste volume nu am epuizat stocul de cărți care cuprinde istoria matematicilor. Acelea erau dintre cele mai vechi. Iată altele, moderne de tot: cele două volume ale lui E. Smith, sau volumele lui J. Tropfke, Fl. Cajori, G. Loria, E. Bortolotti, ori cartea lui A. P. Iușkevici, tradusă la noi în 1963 (85). În aceste cărți vei

găsi informații generale, iar dacă vrei amănunte, atunci trebuie să recurgem la ajutorul articolelor publicate și citate din reviste. În acest caz, trebuie să notezi cu grijă care-i autorul și titlul articolului, volumul, numărul, anul și pagina revistei în care se află acel articol și apoi să-ți



Universitatea din Iași.
Seminarul matematic „Al. Myller"

scoți revista din raft și să citești pe rînd fiecare dintre articolele ce le-ai notat. Dar nici cu aceasta nu am terminat, fiindcă mai există încă multe alte articole ce nu au fost încă citate prin cărți ! Pe acelea le poți găsi cercetînd direct revistele în care se publică *recenziile* asupra celor mai imporante lucrări de matematici din toate domeniile și din toate țările. Desigur, nu trebuie să-ți mai atrag atenția că în ele vei căuta *rubrica* din *capitolul de geometrie* legat de problemele despre care am vorbit mai înainte. Una dintre cele mai vechi reviste de recenzii a fost „*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*". Primul volum a apărut în 1868, dar ea și-a încetat apariția în anul 1941 ca victimă a războiului hitlerist. Iată o altă revistă de același gen: *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebite* care apare din 1931 și continuă și acum. De mai tîrziu, adică din 1940, poți consulta și *Mathematical review* sau

Bulletin Analytique, iar din 1953 *Referativnîi jurnal matematik*. În toate aceste reviste poți găsi informații, mai mult sau mai puțin ample, asupra lucrărilor ce s-au scris în legătură cu cuadratura cercului, de obicei, în anumite reviste specializate în domeniul istoriei matematicilor (86). Iar acum, cred că te pot lăsa să cercetezi și singur acest capitol. Să zicem că ai vrea să te informezi asupra cunoștințelor ce le posedau hindușii în privința numărului π pînă în veacul al XI-lea, la care ne-am oprit, deocamdată. Pe lîngă toate cărțile și revistele despre care ți-am vorbit, cred că vei fi dat singur peste cele două volume, des citate, scrise de Datta și Singh (87) despre istoria matematicilor hinduse. Deschizîndu-le, vezi că în India, cunoștințele științifice au fost transmise, la început, numai pe cale orală și ca acestea să se poată memora ușor, ele erau expuse în versuri. Scrierile lor cu caracter științific datează, după unii, numai cu vreo 1000 de ani î.e.n., iar după alții, cu cîteva veacuri mai tîrziu. În această epocă se situează și *Surya Siddhanta*, carte scrisă în versuri, unde lui π îi este atribuită valoarea $\pi = 3{,}06$ sau $\pi = 3{,}08$. Dar cu mai multă precizie se poate afirma că, prin veacul al V-lea, atunci cînd în Europa nimeni nu mai avea grija numărului π, în India, Aryabhata, unul dintre cei mai mari gînditori și astronomi hinduși, considera numărul π ca avînd o valoare aproximativă de 3,1416, așadar el atingea o precizie demnă de admirat, chiar de geometrii Greciei antice. Versurile prin care exprima acest rezultat au această semnificație: „Adună 4 la 100, înmulțește cu 8 și adună totul cu 62 000. Ceea ce vei afla este valoarea aproximativă a lungimii cercului, dacă diametrul lui este de 20 000 (88)". Tot în această carte, intitulată după numele autorului *Aryabhatya*, este indicată și valoarea $\pi = 3\frac{17}{120}$, valoare ce se află și în cartea vestitului astronom grec Ptolemeu (85—165 e.n.) cunoscută sub numele arab de *Almagesta*. Nu-i așa că ți se pare grozavă noutatea ce ai aflat-o despre hinduși? În secolul al V-lea, ei aveau primele 3 zecimale exacte ale lui π, în timp ce europenii habar n-aveau că 3,14 era o valoare aproximativă a lui π și o priveau ca exactă, nu numai atunci, ci chiar cu 500 de ani mai tîrziu! Dar totul este relativ! Dacă facem cîțiva pași mai înspre nord-est și ne întoarcem chiar cu două secole mai înainte, îl găsim pe matematicianul și astronomul

chinez Liu-hui (secolul III e.n.) preocupat și el de problema cuadraturii cercului, ba chiar aplicînd metoda folosită de Arhimede. Dar știi la ce fel de poligoane? Nu la acelea cu 96 de laturi, cu cît s-a mulțumit genialul lui înaintaș, ci la poligoane înscrise și circumscrise cercului, avînd 192 de laturi ! E drept că aproximația pe care o atinge el $\pi = \frac{157}{50} \simeq 3{,}14$ nu a depășit-o pe aceea a lui Aryabhata, în schimb contemporanul lui chinez din veacul al V-lea, vestitul astronom Tsu Chung Chih a stabilit primele 6 zecimale exacte ale lui π, arătînd că π se află cuprins între 3,1415926 și 3,1415927. Tot lui i se atribuie și determinarea unui alt raport de numere întregi prin care se poate aproxima numărul π pînă la a 6-a zecimală, anume : $\pi = \frac{355}{113}$ (89). Rezultate la fel de spectaculoase vei afla, dragă cititorule, și dacă ai să răsfoiești alte volume care-ți vor arăta contribuția adusă, începînd cu veacul al VIII-lea, la istoria matematicilor de către popoarele din întreaga Asie Centrală de cultură arabă. Pe atunci, funcționa la Bagdad o înaltă instituție științifică numită *Beit al-Himka*, care se traduce prin *Casa înțelepciunii*. Aici fuseseră adunate cele mai strălucite minți din întreaga lume arabă, avînd misiunea să traducă sau să prelucreze cele mai de seamă opere științifice sau filozofice ce se aflau pe atunci în lumea întreagă (90). Abia după ce și-au însușit, în acest mod, cea mai mare parte din cultura elenistică-romană, hindusă, persană, siriană etc., învățații de cultură arabă au ajuns la importante realizări originale în domeniul matematicilor și al astronomiei, lăsînd la o parte descoperirile lor din celelalte ramuri ale științelor, care nu intră în preocupările noastre. Astfel, prin anul 827 s-a efectuat, în deșertul Siriei, măsurătoarea unui arc de meridian și începînd tot de atunci s-au construit multe observatoare astronomice în diferite orașe ale imperiului (91). Chemată să satisfacă nevoile comerțului, agriculturii și industriei în plină dezvoltare, știința arabă a atins, în decursul veacurilor VIII—XII, un nivel cu mult deasupra celorlalte popoare. Ei sînt acum aceia care duc mai departe cunoștințele științifice din vremea lor și, totodată, dețin comoara științifică a trecutului. În această privință, indicații deosebit de prețioase vei afla atît în cartea mai veche a lui H. Suter intitulată *Matematica arabă*, cît și în cea modernă

a lui A. P. Iușkevici : *Istoria matematicii în Evul mediu.* Iată, de pildă, un fapt extraordinar consemnat în volumul lui Iușkevici : în 1424, matematicianul Djemșid ibn Masud al-Kași, supranumit Ghiasedin, a prezentat, în tratatul său despre cerc, nu mai puțin decît 17 zecimale ale numărului π ! Desigur că, cu mult mai înainte de această dată, savanții din Asia centrală sau din Arabia stabiliseră multe rezultate noi în geometrie sau în legătură cu numărul π (92).

Printre matematicienii din veacul al X-lea, un loc de frunte îl ocupă și savantul enciclopedist Abu Ali al Hasan ibn al-Haisam (965—1039) despre care ți-am mai vorbit. El a comentat operele lui Aristotel și a scris multe lucrări originale. Nu putem vorbi aici decît de *Tratatul* lui ibn al-Haisam despre *cuadratura cercului.* Ibn al-Haisam avea cu totul altă pregătire științifică decît Francon. El cunoștea îndeaproape lucrările lui Hipocrate despre cuadratura lunulelor și pe acelea ale lui Arhimede (93). Și totuși, ca și Francon, s-a rătăcit și el pe cărările întortocheate și pline de vrajă ale cuadraturii cercului. Dar, răsfoind asemenea cărți legate de istoria matematicilor din Asia Centrală, vei avea surpriza să întîlnești și figura poetului matematician de origine iraniană Omar Khayyam, renumit în lumea întreagă prin catrenele lui. Pe lîngă acestea, el a scris opere filozofice, astronomice și matematice fiind un adînc cunoscător al geometriei grecești. Cartea sa de *Algebră*, a fost reeditată de F. Woepcke în 1851. În 1962, binecunoscuții cercetători ai acestei epoci, B. A. Rozenfeld și A. P. Iușkevici au publicat o documentată biografie asupra acestei remarcabile personalități (94). Pe la 1074, Khayyam a fost numit directorul Observatorului astronomic din Merv, important oraș din Asia Centrală. Dacă vrei să-l cunoști mai îndeaproape, am putea să ne îndreptăm către observator, unde îl vom găsi stînd de veghe *în noaptea înstelată.*

VIII

ÎN NOAPTEA ÎNSTELATĂ

„Un matematician care nu-i cît de cît poet nu poate fi un adevărat matematician".

Karl Weierstrass

Era prin anul 482 al erei hegire (95), adică prin anul 1090 după calendarul european, într-un asfințit senin de toamnă, în cupola Observatorului astronomic din Merv (96). Omar al-Khayyam controla, împreună cu elevul și prietenul său Mozaffar al-Isfizari (97), aparatele ce aveau să le folosească. Se grăbeau, căci amurgul luneca repede în noapte și ei aveau de fixat pozițiile unor stele ce nu stăteau prea mult deasupra orizontului. Noaptea se arăta prielnică pentru observații, pe cer nu se zărea nici un nor, iar luna avea să răsară destul de tîrziu.

Cum au terminat, au aprins cîte un felinar, au pus alături foile pe care aveau notate pozițiile stelelor din noaptea trecută și, fără să rostească vreo vorbă, s-a apropiat fiecare de astrolabul lui. În liniștea din cupolă, mișcările lor sincronizate păreau că fac parte din maiestuoasa mișcare diurnă a sferei cerești. Amîndoi priveau cu atenție stelele și le așteptau să ajungă în dreptul pinulelor. Cele ce veneau din apropierea orizontului alergau zorite, cu un zîmbet cochet și rece, indiferente la greutățile ce le pricinuiau observatorilor ca să le noteze poziția. Altele însă veneau domol, așteptînd cu răbdare pînă li se înregistra trecerea prin dreptul indicatorului. Stelele circumpolare nu se grăbeau deloc. Se lăsau îmbătate de clipă, mîngîindu-i parcă cu lumina lor, înainte de a-i părăsi. Ca niște automate, cei doi observatori își desprindeau doar o clipă ochii de la ele ca să noteze ceva în grabă pe foi și apoi le priveau din nou. De ani de zile, nopți și nopți de-a rîndul făceau același lucru și de fiecare dată erau prinși de vraja acelor

micuțe și atotputernice puncte strălucitoare care se învîrteau în jurul lor.

Într-un tîrziu, s-au apropiat amîndoi de balustradă, frecîndu-se la ochi și privind în întuneric. La orizont apărea Luna. Mozaffar, înfiorat o privi, șoptind :

— *„Somn pe pămînt, somn sub pămînt,*
Trupuri întinse sau oameni, ce sînt?
Unii se nasc, alții se duc !
Pustiu în neant, neant neînfrînt“ (98)

— În noaptea asta aș spune altfel, l-a zădărît Omar pe Mozaffar, privindu-l pe sub sprîncene. Uite cum :

*„Netrebnică-i inima care nu știe ce-nseamnă iubire_*
Și nu se lasă-mbătată de ea în neștire.
Fără iubire, cum poți simți mîngîierea caldă a lunii
Ori prețui a soarelui grea strălucire“

(loc. cit. 98, p. 33, 8)

Ca un avar culegea Mozaffar fiecare cuvînt rostit de învățătorul lui și îl memora, repetîndu-l în gînd. Îl iubea pe Omar și era nespus de fericit atunci cînd izbutea să rămînă singur cu el. În seara aceasta nici tatăl lui nu venise, fiindcă toată dimineața a avut de pus în ordine rezultatele obținute cu o seară mai înainte, așa că erau numai ei doi. Omar aprecia dragostea elevului său atît pentru astronomie și matematici în general, cît și pentru poezie. Ca să-l necăjească, i-a spus cu un aer obosit : E tîrziu, cred că ar fi timpul să plecăm.

— Ba nu, ba nu ! Te rog Imam Khayyam să mai stăm de vorbă încă puțin. N-ai spus tu singur oare :

„Era s-adorm și-nțelepciunea îmi șopti :
Floarea fericirii în somn n-o mirosi !
Bea vin să nu te prindă-al morții frate bun,
Că de dormit, o veșnicie vei dormi !“

(loc. cit. 98, p. 37, 20)

Și, poate fi oare vin mai dulce sau mai gustos, a adăugat Mozaffar, decît acela turnat de tine în paharul sufle-

Omar Khayyam prezintă catrenele sale șahului Malik (Pictură persană pe lemn din sec. XII)

tului meu, cînd îmi șoptești versurile tale sau cînd îmi arăți calea ce mă conduce la dezlegarea problemelor, uneori la fel de întortocheată ca și firul dintr-un filigran de aur, meșteșugit cu artă?

— Văd că nu te ții de cuvînt, i-a întors-o zîmbind Omar. N-am hotărît noi, mai ieri-alaltăieri, să nu ne mai pierdem nopțile cînd în dimineața următoare ne așteaptă lucrul ?

— Asta a fost săptămîna trecută ! Oare n-am fost cu păgubit de destule comori în acest răstimp? De aceea, acum am să te rog chiar prin versurile tale :

„Fii bun cu oamenii care se-mbată
Că multe-i fi făcut și tu vreodată.
Apleacă-te spre cei umili, ascultă-i
Și-n fericirea lor, pe-a ta o cată !“

(98, p. 32, 4)

— Bine ! Atunci în seara aceasta am să-ți citesc ceva foarte frumos, a răspuns Omar, îndepărtîndu-se de balustradă cu felinarul în mînă.

— Din *Cronica* lui al-Biruni? (99) — a întrebat cu bucurie în glas, Mozaffar.

— Nu, n-ai ghicit. Ba, îți spun dinainte că n-ai să ghicești, chiar dacă te înștiințez că am la mine o lucrare a lui ibn al-Haisam !

— Ba am să ghicesc ! Trebuie să fie vorba despre determinarea pătratului egal cu un anumit număr de părți din cubul laturii lui ! Știu bine că te preocupă această problemă, fiindcă ai și scris despre ea, acum două săptămîni, în cartea ta de algebră (loc cit. nr. 94 a, p. 75) !

— Iată că n-ai ghicit !

Mozaffar s-a apropiat de masă, și-a încrucișat picioarele sub el și apoi a îndreptat felinarul înspre fața lui Omar. După ce l-a privit a spus :

— Îți scîlpesc ochii, Hagi Omar, de parcă ar fi vorba de o năzdrăvănie, dar fiind vorba de o lucrare a lui ibn al-Haisam... nu-mi vine să cred !...

— De-abia acum ai ghicit, prietene ! Află că cercetînd în continuare scrierile lui, am dat de o adevărată năzdrăvănie ! Dar se cuvine să fim îngăduitori cu el... Unii se îmbată cu catrene, alții, poate cu mai puțin simț poetic, aleg cuadratura cercului...

— Ai spus *cuadratura cercului*, Imam Khayyam? s-a mirat Mozaffar, vorbind mai cu nerăbdare. A scris ibn al-Haisam și despre aceasta? L-a cuprins și pe el această patimă? Dă-mi te rog și mie lucrarea să mă uit prin ea.

După ce a răsfoit manuscrisul, Mozaffar a adăugat, nedumerit :

— Văd că al-Haisam pune problema cu multă seriozitate...

— Întocmai, a confirmat profesorul. Ascultă titlul : *Tratatul lui Ibn al-Haisam despre cuadratura cercului* (100). După acesta urmează : „Mulți filozofi cred că-i imposibil ca aria cercului să fie egală cu a unui pătrat și respinge această concepție în multe dintre lucrările lor scrise, sau în controverse. De fapt, nu găsim la nici unul dintre geometrii vechi și noi un poligon să fie egal cu aria unui cerc, pînă la limita extremă a exactității, căci în ce privește figura amintită de Arhimede în *Măsura cercului*, se folosește numai o parte a ariei".

— Nu-i așa că în fraza aceasta, al-Haisam face aluzie la faptul că Arhimede a considerat poligonul cu 96 de laturi?

— Bineînțeles. Și acum ascultă mai departe: „Aceasta este faptul care, pe lîngă alte motive, i-a întărit pe filozofi în credința lor. Așa stînd lucrurile, mi-am îndreptat cu pasiune toate gîndurile către acest obiect și mi s-a părut că lucrul ar fi posibil și nici nu-i prea greu. La întărirea acestei păreri servesc exemplele despre existența lunulelor formate din două arce de cerc care sînt egale cu un triunghi, și a lunulei adăugită cu un cerc egală cu un triunghi. Noi am mai amintit diferite cazuri de acest fel în cartea *Despre lunule...*"

— Atunci totul este explicabil, a întrerupt Mozaffar. Eu nu am știut că el a cercetat și cazul lunulelor.

— O, da! Le-a cercetat, ba încă despre ele a scris două cărți admirabile, una prescurtată și alta cuprinzînd mai multe amănunte asupra descoperirilor făcute chiar de dînsul. Al-Haisam a avut o inteligență sclipitoare și nu cred să-l fi întrecut cineva în cultura matematică. Numărul lucrărilor lui este foarte mare, iar eu nici nu le cunosc pe toate. Și acum, am să citesc în continuare: „După ce am adus problema pînă la aceste proprietăți ale lunulelor, am fost întăriți în părerea că ar fi posibil ca aria cercului să fie egală cu a unui pătrat și am studiat, cu mult zel, pînă ce dovada a fost clară și asupra acestui lucru nu a mai existat nici o îndoială. Atunci am redactat această lucrare"... (101). Cînd Omar a sfîrșit de citit demonstrația expusă de al-Haisam, Mozaffar l-a întrerupt din nou:

— E foarte interesant ceea ce afirmă el. Ai avut dreptate să susții că a avut o inteligență sclipitoare, fiindcă el a generalizat aici acea teoremă despre lunule pe care o citisem în cartea lui Hipocrate. Acolo am aflat numai cazul lunulelor legate de triunghiul dreptunghic și isoscel, pe cînd acum o aud extinsă la cazul unui triunghi oarecare.

— „După ce am dovedit aceasta", a continuat Omar fără să fi răspuns nimic la observația elevului său, „să luăm iar cercul *ABG* (fig. 11) cu lunula *AEBH* și triunghiul *ABD* și să împărțim *AB* în două părți egale prin punctul *K*, în așa fel ca acesta să fie centrul cercului *AEB*; să ducem apoi *DK* și să o prelungim pînă întîlnește arcul *AHB* în *H* și *AEB* în *E*. *DKHE* este un diametru al cercurilor *ABG* și *AEB*, căci trece prin centrele lor. Acum să împărțim *EH* în două părți egale prin punctul *L*, centrul cercului *HMEN* de rază *LH*. Acest cerc este tangent la cercul *ABG* în exterior și la cercul *AEB* în interior, deoa-

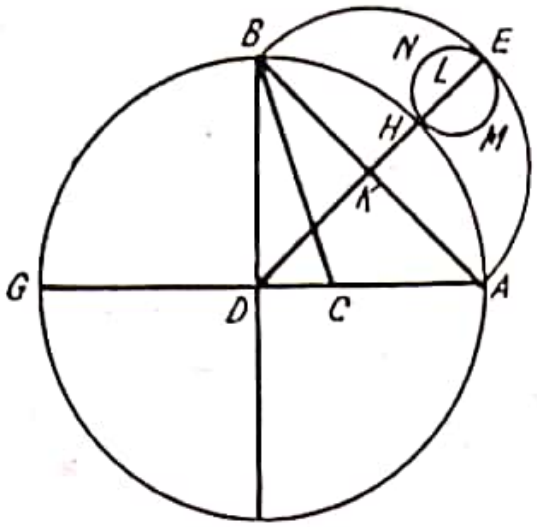


Fig. 11

rece întîlnește aceste cercuri la extremitatea diametrului lor comun. Așadar, cercul *HMEN* este în interiorul lunulei *AEBH* și deci este o parte a acestei lunule. Or, fiecare mărime are către altă mărime, ce este o parte a ei, *un anume raport determinat*, chiar și cînd *nimeni nu cunoaște acest raport* și nici *nu ar putea ajunge la el*, căci raportul între ambele mărimi există nu numai atunci cînd el este cunoscut oamenilor sau cînd ei pot să-l afle și să-l recunoască, ci în *mod absolut*, fără considerație. Raportul dintre două mărimi este o proprietate esențială numai pentru mărimile de același fel; deci, cînd sînt date două mărimi de același fel și fiecare dintre ele este mărginită, finită și persistînd în mărimea ei, nemodificîndu-se nici prin creștere nici prin micșorare, nici cu privire la felul ei, atunci are una asupra celeilalte un singur raport determinat, care nu se schimbă în nici un fel... Fie, de exemplu, raportul lunulei *AEBH* la cercul *HMEN* egal cu raportul liniei *AD* la o parte a ei; fie că cunoaștem sau nu această parte, fie că sîntem în stare să o aflăm sau nu, e destul ca această parte să fie *DC*; așadar, raportul lunulei *AEBH* este față de cercul *HMEN* egal cu raportul *AB/DC*, care-i invariabil, căci și primul este așa. Dar, dacă acest raport este invariabil, atunci și linia *DC* este absolut determinată, invariabilă în mărime, deoarece și linia *AD* este dată invariabilă în mărimea ei. Să ducem *DC* și obținem astfel triunghiul *BDC*".

— Ei, iată că aici l-am prins, a sărit în picioare, rîzînd și bătînd din palme ca un copil, Mozaffar. Vreau să știu cum construiește el segmentul *DC*, căci problema este *să*

construiești segmentul DC cu rigla și compasul! Și, după încercările lui disperate de a mă face să cred în *existența* lui, bănuiesc, ba *sînt sigur*, că nu a putut face această construcție! Nu-i așa, înțeleptul meu profesor?

— Ba-i așa! El promite că va arăta această construcție într-o lucrare viitoare și după aceea spune că „odată admisă existența segmentului *DC*, demonstrația este simplă (102)".

— Cred și eu că odată ajuns aici, totul apare limpede. Am învățat doar din cartea a doua a *Elementelor*, cum se poate afla latura pătratului de aceeași arie cu a unui triunghi. Totul era *să se poată ajunge la construirea segmentului DC numai cu rigla și compasul*, a spus Mozaffar, deziluzionat. De aici înainte, aș putea continua eu însumi demonstrația astfel: Considerînd că raportul dintre diametrele celor două cercuri este $\frac{AG}{EH} = \frac{XQ}{FQ}$, și avînd: $\frac{AG^2}{EH^2} = \frac{XQ^2}{FQ^2}$ (fig. 12) rezultă, după teorema a II-a din cartea a XII-a:

$$\frac{AG^2}{EH^2} = \frac{\text{cerc } ABG}{\text{cerc } HMEN} = \frac{XQ^2}{FQ^2}$$

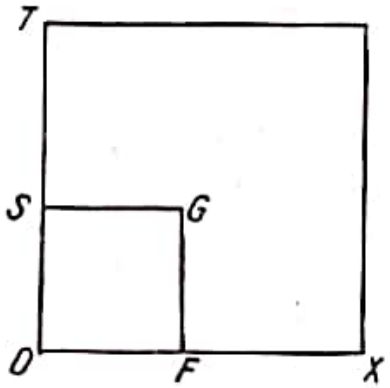


Fig. 12

— Sînt mîndru de tine, dragul meu, în adevăr aceasta-i demonstrația.

— Va să zică, așa voiai să-mi dovedești *tu*, *mie*, marele ibn al-Haisam, că pătratul de latură *XQ* este egal cu cercul *ABG*? s-a adresat, amenințînd cu degetul undeva în gol, Mozaffar. Îmi pare rău, dar nu m-ai putut convinge!

— Stai, l-a întrerupt rîzînd din plin Omar. El a bănuit că nu te va convinge cu una, cu două, așa că a mai adăugat încă acestea: „Acum, în ce privește drumul prin care va fi aflat acest pătrat, îl vom arăta în altă lucrare,

deosebită. Scopul acesteia a fost să se arate numai că problema este posibilă, pentru ca prin aceasta să fie prezentată clar absurditatea părerii acelora care cred că nu este adevărat că un cerc poate fi egal cu un pătrat. Însă, destul despre stabilirea acestui fapt; noi nu am avut alt scop în lucrarea de față".

— Adevărat, zic și eu, destul cu asemenea absurdități, a vorbit din nou Mozaffar. Totuși, nu-l înțeleg pe ibn al-Haisam! De ce a scris el această lucrare? Dacă nu l-aș ști de bună credință, aș spune că și-a bătut joc de noi!

— Da, și mie îmi pare rău, a observat Omar, că un om cu o minte așa de luminată s-a lăsat prins de mrejele cuadraturii! Drept să-ți spun, această problemă otrăvită m-a preocupat și pe mine un timp, de aceea cunosc sentimentul ce te cuprinde cînd te apropii de ea. Greutatea, sau, poate, imposibilitatea de a găsi soluția ei folosind numai rigla și compasul, fiind mascată de anumite considerații teoretice, o face la fel de ademenitoare ca un ochi de șarpe... Îl vezi și dacă zăbovești ca să-l privești, gata, nu te mai poți desprinde din privirea lui și șarpele poate sări la tine și te poate mușca, înveninîndu-te uneori fără de scăpare.

— Bănuiesc că nu a mai scris a doua carte, în care să stabilească metoda promisă.

— Nu.

— De bună seamă că nu, fiindcă aceasta este una dintre surorile altor probleme buclucașe: duplicarea cubului, trisecția unghiului și, *aș îndrăzni să spun*, postulatul paralelelor... (103).

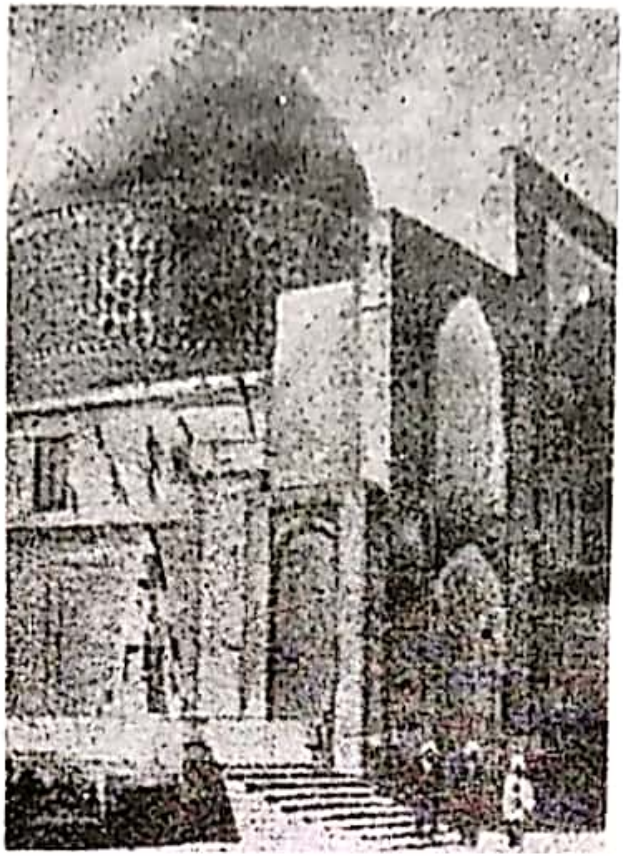
— Totuși, în privința paralelelor, cred că nu ai dreptate, s-a împotrivit al-Khayyam.

— De ce „totuși" Hagi Omar? Nu fi supărat pe mine, de obrăznicia mea, dar mie mi se pare că și aceasta din urmă este tot un ochi de șarpe; că toate aceste probleme duc undeva dincolo de bariera domeniului matematic, acolo unde și versului și vinului îi este permis să vină ca să le țină tovărășie.

Sculîndu-se de la masă, Mozaffar a adus un ulcior de vin și turnînd în cupe a început să recite, duios și cu încetineală:

„Odinioară acest ulcior era iubitul care
Tînjea și suspina mereu dup-o nepăsătoare,

Mormîntul
lui Omar Khayyam



Iar toarta lui? Nu simți și-acum, cum i se-nd o aie brațul,
Și-o ține strîns de după gît, să-i fure-o sărutare?"

(loc. cit. nr. 98, p. 32, 7)

Într-un tîrziu, răspunzînd poate gîndurilor ce-l apăsau, Omar a adăugat :

„Savanții și oamenii cu mintea de-nțelepciune plină,
Orbecăit-au prin bezna neștiinței făr-hodină._
Cum au aprins făcliile epocii lor? Ce-au făcut?
Rostit-au fraze ne-nțelese și-au coborît în tină !"

(loc. cit. nr. 98, p. 37, 28)

— Îți mulțumesc pentru giuvaerul ce mi l-ai dăruit acum, a șoptit Mozaffar. El mi-a arătat că nu te-ai supărat pe mine. L-am prins fericit în salba din inimă, alături de celelalte !

— În salbă? a rîs Omar al-Khayyam. De ce? Într-un fel sau altul, tot bîjbîieli prin întuneric sînt și aceste versuri cărora tu le spui „giuvaere" !

Mișcat peste măsură, Mozaffar s-a ridicat să plece. Nu mai putea vorbi. Numai ochii, privindu-l stăruitor pe Omar îi cereau „catrenul" pe care îl numise cîndva „catrenul lor de despărțire". Acesta a înțeles și i-a îndeplinit ruga, recitîndu-l :

„De mii și mii de veacuri soarele răsare și apune,
De mii și mii de veacuri stelele aleargă-nspre genune.
Să calci încet pămîntul ! Bulgărul ce-l sfărmi cu nepăsare
A fost, poate, un ochi de copilandru-n rugăciune".

(loc. cit. nr. 08, p. 42, 48)

Mozaffar s-a îndepărtat încet. Mergea repetînd aceste versuri, apoi altele și altele pînă ce versurile au fost alungate de frazele stăruitoare, lungi și încîlcite, din textul lui ibn al-Haisam. Dar nu aveau intonația ce le-o dăduse învățătorul său, ci o alta, plină de căldură și ritm de vers. Avea impresia că ibn al-Haisam se afla alături de el și căuta să-l convingă : „De ce nu înțelegi că orice cerc *este egal* cu un pătrat? De ce stărui să reduci la *executare practică* adevărul înțeles de rațiune? De ce nu te mulțumește dovada adusă *pînă la* stabilirea posibilității lucrului afirmat (loc. cit. nr. 100)?" La acestea, Mozaffar, uitînd că era singur în noapte, i-a răspuns trist și înduioșat : „Iartă-mă, ibn al-Haisam, te rog să mă ierți că am fost adineauri așa de aspru cu tine ! Acum de-abia te înțeleg și știu de ce ți-a fost dragă cuadratura cercului, de ce te-ai lăsat furat de demonstrațiile acelea. Acum știu că frumusețea lor, aidoma versurilor, îți mîngîiau singurătatea, amăgindu-te. Dacă l-ai fi cunoscut pe Omar al meu, atunci mintea ta ar fi fost slobodă să caute și alte adevăruri tot așa de adînci și admirabile ca acelea despre volumul paraboloizilor, prin care tu l-ai întrecut chiar pe învățatul Arhimede. Atunci ai fi putut să te ferești de *molima cuadraturii cercului* !"

IX

MOLIMA CUADRATURII CERCULUI

„Imnul tumulturilor vii
Nici zid și nici tenebră nu poate să-l sufoce !
La poarta zăvorîtă grăbește-te să vii ...“

Ion Barbu

Trebuie să știi, dragă cititorule, că în timpul Evului mediu și în Renaștere cultura arabă a influențat mult dezvoltarea cultural-științifică a Europei apusene. Prin orientarea către studiul științelor naturii, operele savanților care s-au exprimat în limba arabă, au avut nu numai meritul de a furniza culturii europene valori din cultura antică (104) și orientală, ci și de a-i pune la dispoziție importantele descoperiri originale din domeniul matematicilor (105), descoperiri care au stimulat interesul europenilor pentru asemenea cercetări, în particular pentru problemele cu conținut aritmetic și geometric. Iar dacă Francon a fost numai chinuit de dorința de a pleca în Spania, alții după el au și realizat-o. Astfel se știe că, prin 1120, Adelard din Bath, s-a travestit în student mahomedan ca să poată urma cursurile Universității din Cordova. Fiind acolo, el și-a procurat o copie a *Elementelor* lui Euclid, traduse în limba arabă și cînd s-a înapoiat, a tradus-o în limba latină (106). Ca să înțelegi cît interes a stîrnit această primă traducere a *Elementelor* lui Euclid, află că, tot în acest secol, au mai fost făcute încă alte două traduceri latinești ale *Elementelor*, una de către Gherard din Cremona (107) și cealaltă de către Platon din Tivoli (108), și acestea tot după texte arabe, originalul grecesc fiind descoperit abia în secolul al XVI-lea.

Cu Gherard din Cremona și Platon din Tivoli începe seria traducerilor masive ale lucrărilor de matematici din limba arabă. Platon din Tivoli a mai tradus în latinește și o foarte renumită geometrie, scrisă de Savasorda în limba ebraică (109) intitulată *Liber embadorum*, ceea ce,

în traducere, ar fi *Cartea despre arii*. Ea a fost luată ca model de către Leonardo Fibonacci (110) cînd a scris prin 1220, lucrarea sa *Practica geometria*. În această carte, Leonardo Fibonacci, cel mai vestit matematician din evul mediu, a restabilit și adevărata identitate a numărului π, arătînd un adevăr de mult uitat, mai ales de cuadraturiști, anume că valorile cunoscute ale numărului π sînt *valori aproximative* și nu *exacte*. Pe lîngă valoarea stabilită de Arhimede $\pi = 3\frac{1}{7}$, el a prezentat și aceea exprimată prin raportul $\pi = 3\frac{17}{120} = 3\frac{377}{120}$.

Cred că îți mai amintești că această fracție a fost stabilită de Aryabhata și are, prin urmare, o origine hindusă? Ei bine, dacă citarea acestui număr te-ar face să presupui că Fibonacci a cunoscut lucrările matematicienilor hinduși, să știi că nu greșești ! Nu numai *Practica geometria*, ci și celelalte lucrări scrise de el o dovedesc. Dar Leonardo nu s-a mulțumit să menționeze numai aceste două valori ale numărului π, ci a mai indicat una, exprimată printr-o nouă fracție : $\pi = \frac{864}{275} = 3{,}1418$, ce cuprinde *trei zecimale exacte*, fracție, foarte probabil, stabilită chiar de el. Și iată cum : cunoscînd îndeaproape metoda lui Arhimede, a aplicat-o tot la poligoanele cu 96 de laturi înscrise și circumscrise cercului. Calculele lui, desigur mai precise, l-au condus la următoarele inegalități :

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1448}{458\frac{1}{5}}.$$

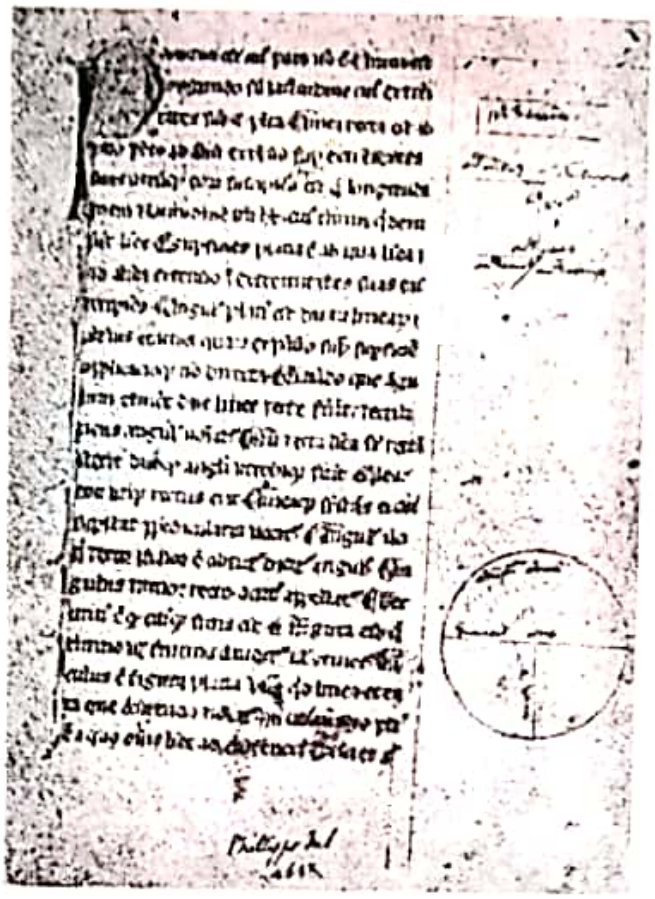
Aceste valori limită ale numărului π l-au îndreptățit să considere media aritmetică dintre fracțiile de la numitor : $\frac{4}{9}$ și $\frac{1}{5}$, medie dată de fracția $\frac{29}{90}$, adică aproximativ egală cu $\frac{1}{3}$ și să admită că numărul π se poate exprima în mod aproximativ și prin fracția $\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275}$. Prin cunoștințele sale matematice și prin puterea lui de judecată, Finobacci a depășit pe contemporanii lui. Ca dovadă, am să-ți citez altă carte de geometrie, în patru volume, numită *De trianguli, libri IV*, (111) scrisă tot pe

atunci de un geometru remarcabil, pe nume Jordanus Nemorarius sau Jordanus din Saxonia. Acest Jordanus din Saxonia era convins de posibilitatea cuadraturii cercului cu rigla și compasul și a susținut aceasta, în cartea sa, fără însă a stabili vreo demonstrație. Dealtfel, nu-i singurul ! De aceeași părere a fost și Campanus din Novara, un perfect cunoscător al *Elementelor* lui Euclid (112), și autorul unei noi versiuni latinești a lor. Această lucrare a scris-o folosind traducerea lui Adelhard și a completat-o cu note și comentarii. Citind cartea lui Campanus, care a circulat multă vreme, chiar și după ce s-a descoperit tiparul, fiind imprimată împreună cu alte geometrii, ai putea vedea că el *nici nu a pus corect problema cuadraturii*, fiindcă el nu căuta latura pătratului *de arie egală cu a unui cerc dat*, ci a pătratului *cu perimetrul egal cu lungimea unui cerc dat* ! Admițînd cuadratura, înseamnă că, implicit considera, ca și Francon, că valoarea lui π este exact egală cu $\frac{22}{7}$. Dar în timp ce Francon avea o scuză, aceea că nu citise *Elementele* lui Euclid, Campanus, din contra, le cunoștea perfect și fusese în stare să le comenteze. Atunci care-i explicația? — mă vei întreba nedumerit. Dacă vrei să știi, am să-ți spun că ea are la bază concluzia trasă dintr-o definiție a lui Euclid, cu privire la *unghiul de contingență* (113), adică a unghiului format dintr-un arc de cerc și tangenta dusă la cerc în punctul de contact. În aceste unghiuri, care permiteau să se trateze, în același mod unghiurile formate din linii drepte și acelea dintre liniile curbe, atît Campanus cît și Nemorarius credeau că au găsit un argument în favoarea posibilității cuadraturii cercului cu rigla și compasul. În realitate, argumentele în favoarea cuadraturii cercului cu rigla și compasul se datorau neputinței de a clarifica noțiunea de *segmente incomensurabile între ele*. Or, această noțiune va rămîne nelămurită încă multe secole de-a rîndul, fiindcă ea nu s-a putut desprinde direct, ca o reflectare a rezultatelor experimentale. În practică, adică în mod experimental, rezultatul oricărei măsurători conduce numai la *numere fracționare* adică la noțiunea de *segmente comensurabile* pentru că, oricît ar fi ele de precise, măsurătorile practice au o *precizie limitată*, fiind supuse *erorilor*. Dacă se consideră ca unitate de măsură un segment egal sau mai mic decît limita de precizie a măsurătorii, atunci ra-

portul dintre mărimile ce se măsoară se exprimă prin cîtul dintre două numere întregi. Existența *segmentelor incomensurabile* între ele și deci a *numerelor iraționale* nu s-a putut stabili decît pe *cale teoretică*. Iată de ce, cuadratura cercului a fost în stare să înfierbînte atîtea minți, chiar și după ce *Elementele* lui Euclid nu mai păstrau nici un fel de secrete pentru cuadraturiști. Ca să te încredințez încă o dată că nu exagerez, am să-ți mai dau un exemplu, ba nu, două sau chiar trei. Primul, în legătură cu unul dintre cei mai de seamă matematicieni englezi din secolul al XIV-lea, Thomas Bradwardin, supranumit și *doctor profundis*, ca omagiu pentru lucrarea remarcabilă prin originalitatea ei : *Geometria speculativă* (114). Acest savant a mai scris și două lucrări *ce ne interesează* îndeosebi, ghicești despre ce, nu-i așa? Ele au drept titlu, una *De cvadratura circuli* și cealaltă *De continuo*, în care autorul discută cuadratura, afirmînd *posibilitatea* ei. Totodată, el reia problema pusă de Campanus asupra unghiurilor de contingență, încercînd să tragă concluzii în favoarea cuadraturii, dintr-un anumit raport irațional pe care-l stabilește între unghiul de contingență și unghiul ascuțit rectiliniu corespunzător lui. Al doilea exemplu este tot din veacul al XIV-lea, și se referă la *primul rector al Universității din Viena* (115) *Albertus din Saxonia* (116), alt mare cuadraturist convins. Cartea lui : *De cvadratura circuli*, se prezintă ca un model de demonstrație scolastică. El cercetează, în mod logic, toate argumentele ce au fost aduse pentru și contra cuadraturii, începînd de la Antifon și Bryson și pînă la Campanus, și rămîne la părerea că *este posibilă cuadratura cu rigla și compasul* ! Mai mult, cartea conține și o vie polemică îndreptată către acei ce nu erau de părerea lui. Întîmplarea a făcut ca, în *Codexul* ce cuprinde manuscrisul acestei lucrări, să se mai găsească și o altă lucrare, nesemnată, tot referitor la cuadratură, în care autorul se străduiește să o stabilească, folosind teoremele cunoscute asupra cuadraturii lunulelor. Așadar, după trei veacuri de la încercările lui ibn al-Haisam, erorile făcute de el renasc în alt loc, aidoma păsării Phoenix din propria ei cenușă !

Și totuși, iată că tot în secolul al XIV-lea, Dominicus din Chivassa sau Dominicus Parisiensis a intuit just problema și a accentuat, în cartea sa *Practica geometriae*, că nu se poate ajunge la cuadratura cercului cu rigla și com-

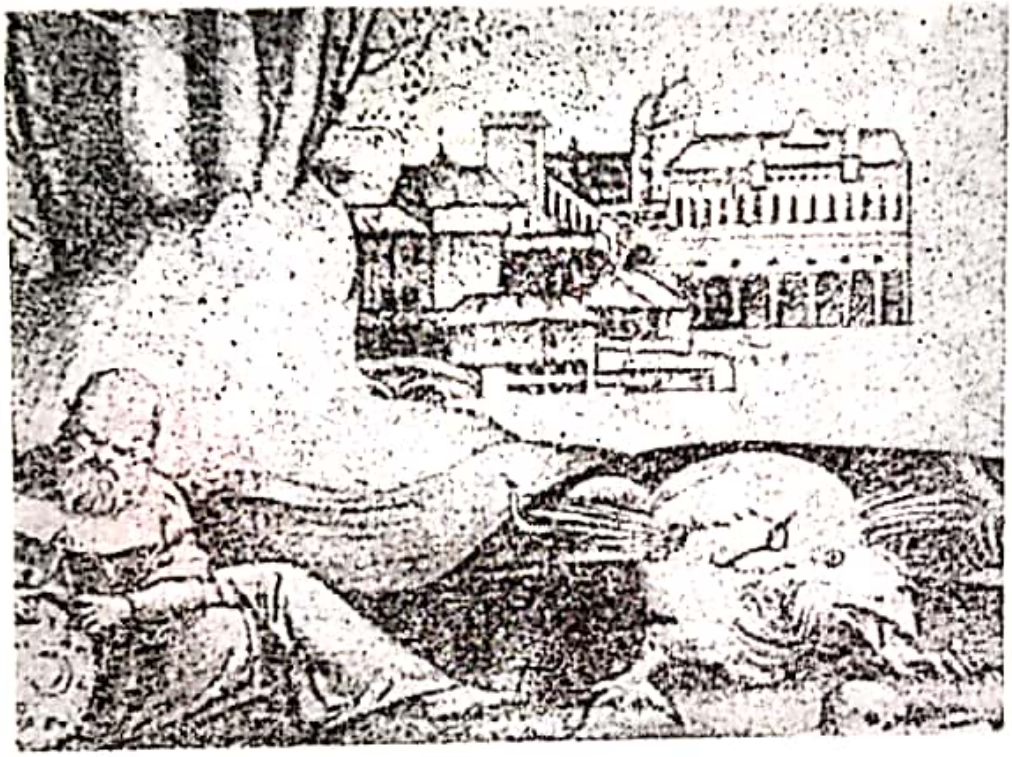
O pagină
dintr-un manuscris
al *Elementelor*
lui Euclid, traduse
de Campanus
de Novara, în 1260



pasul, fiindcă valoarea $\pi = 3\frac{1}{7}$ este numai o valoare aproximativă. Lucrarea lui, terminată la Paris în 1346, este admirabilă prin grija față de rigoarea matematică ce se degajă din paginile ei. „El și-a impus sarcina de a stabili demonstrații, atît pentru procedeele practice folosite pe teren, cît și pentru formulele metrice din geometria practică de care se folosea, și a îndeplinit-o în mod onorabil", scria Paul Tannery despre el (117).

Desigur că, dacă ai vrea să compari activitatea matematică ce se desfășura în Europa occidentală, între secolele al V-lea și al XV-lea, cu aceea din Orientul asiatic, cel îndepărtat și mijlociu, realizările din Europa apuseană ți se vor părea puerile. Deși universitățile din Europa și-au început activitatea din secolul al XII-lea, interesul pentru matematici era foarte restrîns. O poți afla în mod precis, din scrierile lui Roger Bacon, care a fost student și apoi profesor la Oxford, către sfîrșitul secolului al XIII-lea. El arată că pregătirea studenților la geometrie nu depășea primele cinci propoziții din prima carte a *Elementelor* lui Euclid (118). Bacon a fost unul dintre acei care au luptat cu energie împotriva metodelor formale ale scolasticii și a

susținut introducerea, printre obiectele de învățămînt, a *divinelor matematici* argumentînd că numai *ele singure sînt capabile să purifice inteligența și să pregătească un student în așa fel ca să înțeleagă și alte cunoștințe.* Așa se explică de ce, cu toate că un candidat la titlul de profesor avea obligația să cunoască primele 5—6 cărți din *Elementele* lui



Un astrolog

Euclid, pînă în veacul al XVI-lea, verificarea acestor cunoștințe se reducea uneori la o simplă formalitate. La unele universități, examenul de matematici era înlocuit cu *jurămîntul* candidatului că a audiat sau că a studiat aceste cărți, iar la altele, cursul de geometrie fusese, pur și simplu, înlocuit cu unul de *astrologie.* Poate ești curios să afli cu ce argumente combătea, *în secolul al XVI-lea,* doctorul Froimont, profesor la Universitatea din Louvain, teoria lui Copernic? Ascultă-le : „Pămîntul nu poate fi o planetă care se învîrte în jurul Soarelui, căci în centrul Pămîntului se află iadul, și acesta trebuie să fie cît mai departe de cer. Așadar, Pămîntul este în centrul spațiului ceresc !“ Sper că argumentul te-a convins pe deplin că nu era suficient să se găsească oameni care să traducă geometria lui Euclid sau cîțiva entuziaști care să le citească. Oamenii de care se înspăimînta Francon din Liège au ajuns, peste cinci veacuri, profesori la Universitatea din Louvain ! De altfel,

și prin veacul al XVII-lea, se mai găseau asemenea modele pe care aș vrea să ți le prezint ! Iată ce scria, în 1661, Doamna de Sévigné, fiicei ei, în legătură cu cometa care apăruse atunci : „Avem aici o cometă care-i foarte interesantă. Este cea mai frumoasă coadă care se poate vedea. Toate marile personaje sînt alarmate și cred că cerul, preocupat de pierderile lor, le dă avertismente prin această cometă".

Îmi vei riposta, dragă cititorule, că sînt pornit să ponegresc și cred că vrei să mă înfrunți cu propriile mele argumente, opunînd impozantei figuri a profesorului Froimond, pe însuși autorul faimoasei teorii pe care acesta se considera chemat să o combată, pe modestul canonic dintr-un orășel „așezat la capătul lumii" cum spunea singur (119) sau, să-mi amintești că mai înainte ca doamna Sévigné să fi discutat despre *nivelul științific al marilor personaje de la curtea regelui - Soare*, în lumea oamenilor de știință circulau celebrele cuvinte atribuite lui Galileo Galilei : *E pur si muove*. Dacă-i așa, înseamnă că sîntem pe calea cea bună și nu-i nevoie să mă opresc prea mult ca să-ți arăt că procesul de trecere de la neștiința din secolele XI, XII la știința matematică de azi, nu s-a făcut după un plan sistematic, dinainte întocmit și că nu au existat colaboratori, selecționați în acest scop. Elanul sufletesc și întîmplarea le-au înlocuit pe amîndouă și tot ele au croit calea de comunicare între acei ce li se conferă azi titlul de înaintași. Cercetările sistematice, atît în matematici cît și în istoria ei, au început abia pe la sfîrșitul veacului trecut și numai datorită lor pot să-ți spun acum această poveste, arătîndu-ți faptele într-o formă firească, și, de cele mai multe ori, diferită de cea cronologică !

Nici în epoca marilor frămîntări și transformări sociale ce au avut loc în Europa occidentală în cursul veacurilor XV, XVI și XVII, cuadratura cercului nu a fost uitată. Din contra. Problema rămăsese aceeași, dar vremurile și oamenii se schimbaseră. Chiar dacă geometria lui Euclid era ignorată de unii dintre profesorii chemați să o predea în universități, chiar dacă sistemul de gîndire al lui Aristotel își pierduse din suplețe transformîndu-se în aristotelism, cuadraturiștii nu mai erau niște ignoranți care să nu poată construi media geometrică a două segmente. *Elementele* lui Euclid exercitau o deosebită atracție pentru ei și ele erau studiate cu interes nu numai de acei dotați cu

François Viète

spirit geometric, ci și de alți oameni de cultură sau filozofi. Numărul acelora care imaginau construcții geometrice cu rigla și compasul, din ce în ce mai ingenioase și, oarecum, la prima vedere, convingătoare, pretinzînd să fi stabilit astfel latura de arie exact egală cu a unui cerc dat, crescuse dintr-odată așa de mult încît, orice om cuminte s-ar fi putut întreba dacă nu cumva *a dat o molimă* printre cei care se credeau chemați să dezlege această problemă geometrică. Și, dacă mențin comparația, observînd că atunci cînd apare o molimă se caută și mijloace de a o îngrădi, află că molima aceasta a avut un caracter așa de virulent încît mulți dintre cei ce i-au căutat leacul au prezentat și ei, destul de curînd, simptome îngrijorătoare.

Ca să nu-ți țin curiozitatea încordată, te anunț că am de gînd să-ți prezint pe unii dintre cuadraturiști și, cu această ocazie, vei cunoaște și soluțiile propuse de ei. Mai interesant îmi pare însă, să te conduc deocamdată în laboratorul matematicienilor de atunci ca să vezi în ce mod sperau ei să stîrpească molima. Prima și cea mai simplă soluție era să considere de bună mărimea segmentului stabilită de cuadraturistul respectiv drept latură L a pătratu-

lui, și să calculeze aria L^2. Apoi, ținînd seama de această arie trebuia să reprezinte aria cercului de rază dată r, și să deducă din relația $L^2=\pi r^2$, valoarea lui $\pi = \frac{L^2}{r^2}$. Dacă rezultatul nu corespundea cu valoarea stabilită de Arhimede, adică π era mai mic sau mai mare decît $\frac{22}{7} = 3{,}14$, atunci soluția se elimină de la sine, iar dacă valorile coincideau, atunci soluția putea fi luată în considerație ca să fie discutată și din alte puncte de vedere. Multe deziluzii au fost create în felul acesta, însă flagelul nu a încetat. Din contra, s-a întețit. Cuadraturiștii au învățat lecția, au dovedit mai multă ingeniozitate și au inventat alte construcții mai subtile din care rezulta $\pi=3{,}14$. Dar și aceste noi demonstrații, părînd suspecte, ele i-au obligat pe matematicieni să stabilească o valoare mai precisă a numărului π. Așa se face că, pe la sfîrșitul veacului al XVI-lea, olandezul Adrian Anthonisz (120) a determinat șase zecimale exacte ale numărului π, exprimate de data aceasta prin raportul $\frac{355}{113} = 3{,}1415929$. Europenilor de atunci, acest raport le prezenta o noutate, ție însă, îți este cunoscut! Cred că nu ai uitat că el a fost descoperit de matematicianul chinez Tsu Chung Chih, cu 11 secole în urmă. Probabil că rezultatul a fost primit cu interes și entuziasm căci, tot pe atunci, matematicianul francez François Viète (121) a aplicat procedeul lui Arhimede la un poligon cu 393 216 laturi și a determinat astfel, în 1579, primele 9 zecimale exacte ale numărului π. Iată că în felul acesta, la sfîrșitul veacului al XVI-lea, au apărut *primele simptome îngrijorătoare* la acei ce se străduiau să stăvilească molima cuadraturii, maladie care ar putea fi denumită *goana după zecimalele lui* π. Nici nu-ți poți închipui unde a putut duce ea și cred că te vei minuna aflînd că, mai tare decît cuadratura, această formă a flagelului durează, sau oricum, a durat pînă acum cîțiva ani. Dar să nu anticipez, ci să urmez povestea de unde am lăsat-o. Contemporan cu Viète, matematicianul belgian Adrian van Roomen, cunoscut mai mult sub numele de Romanus (122), se avîntă la un poligon cu peste un miliard de laturi, mai exact cu $2^{30} = 1\,073\,741\,824$ de laturi și prin el găsește primele 15 zecimale ale numărului π. Ca să atingă acest record, el

calculează și calculează ani mulți, ani de-a rîndul, fiindcă pe atunci nu existau mașini de calculat, ba nici table de logaritmi, deoarece Neper și-a publicat invenția sa numai cu un an înainte de moartea lui Romanus. Trei ani mai tîrziu, Ludolph van Ceulen, care avea meritul de a fi fost un calculator excepțional, s-a încumetat să-l întreacă pe Romanus, aplicînd aceeași metodă a lui Arhimede la un poligon cu peste 32 miliarde de laturi și, după cîțiva ani de calcule, a dat la iveală 20 de zecimale exacte ale numărului π, în cartea pe care a publicat-o în 1596 (123). Ludolph nu era un matematician, dar a îndrăgit atît de mult zecimalele pe care le-a aflat încît a cerut ca ele să-i fie înscrise pe piatra de pe mormîntul său, așa după cum ceruse odinioară și Arhimede să i se deseneze sfera înscrisă în cilindru. De altfel, la moartea lui Ludolph s-au mai găsit în manuscris încă 15 zecimale exacte, ceea ce arată că el determinase, de fapt, 35 de zecimale ale numărului π. De aceea, ca un omagiu adus memoriei acestui entuziast calculator, multă vreme, *numărul ce avea să se numească mult mai tîrziu* π, a purtat numele de *numărul lui Ludolph.* Se părea că setea de zecimale ale numărului π a fost potolită prin stabilirea celor 35, calculate de Ludolph van Ceulen. A fost numai o părere, dar deocamdată nimeni nu s-a încumetat să întreacă această cifră, dar nici să se încredințeze că nu se strecurase vreo greșeală în calculele executate. Aceasta din cauza duratei și oboselii peste măsură de mari. Dintr-odată însă, acest obstacol ce părea de neînvins, a fost depășit de către matematicianul olandez Willebrod Snellius (124). Ca să înțelegi în ce constă originalitatea descoperirii lui Snellius, trebuie să mă întorc la Arhimede și să-ți precizez că prin teoremele stabilite de el cu privire la determinarea lungimii arcului de cerc, anume, considerînd că lungimea cercului este cuprinsă între perimetrul poligonului interior înscris în cerc și a poligonului exterior, circumscris cercului, el a stabilit ca limită între care se află lungimea arcului de cerc, *coarda care subîntinde arcul* (latura poligonului înscris) și *tangenta la acel arc*, mărginită de razele duse la extremitățile arcului (latura poligonului circumscris). Numind θ unghiul la centru al acestui arc, relația stabilită de Arhimede se exprimă, pe cale trigonometrică, astfel :

$$\sin \theta < \theta < \operatorname{tg} \theta.$$

Folosind această dublă inegalitate, Arhimede a trebuit să ajungă pînă la calcularea laturilor poligoanelor înscrise și circumscrise cercului cu 96 de laturi, ca să obțină astfel primele două zecimale exacte ale lui π, iar lui François Viète, a poligoanelor cu peste trei sute de mii de laturi, ca să-i găsească 9 zecimale exacte. Snellius a determinat o nouă formulă prin care a restrîns limitele între care se află arcul de cerc, adică să aproximeze lungimea arcului de cerc și anume:

$$\frac{3 \sin \theta}{2 + \cos \theta} < \theta < \frac{1}{3}(2 \sin \theta + \operatorname{tg} \theta).$$

Această formulă a micșorat așa de mult limitele între care este cuprins arcul de cerc, încît a fost de ajuns să se considere latura poligonului cu 6 laturi, adică a hexagonului și nu a celui cu 96 de laturi, ca să se stabilească primele două zecimale ale numărului π și a unui poligon cu numai 30 de laturi ca să se obțină aproximația lui Viète, adică 9 zecimale exacte.

Deși formula descoperită de Snellius a permis o considerabilă prescurtare a timpului de calcul pentru zecimalele numărului π, nici Snellius și nici alți matematicieni nu au folosit descoperirea ca să ducă mai departe șirul zecimalelor π, ci numai ca să verifice și să constate exactitatea calculelor făcute de înaintași. Formula propusă de Snellius a îndreptat însă atenția matematicienilor care se preocupau de cuadratura cercului și în alte direcții. Anume, mai întîi ei au băgat de seamă că, deși corectă, formula lui Snellius se baza pe o demonstrație greșită. Se căuta deci o nouă demonstrație în care să se înlăture greșeala de raționament, iar aceasta nu era de loc simplu. Urmînd însă această cale, matematicienii au putut stabili și alte procedee de a calcula limitele între care se află cuprinsă lungimea arcului de cerc și chiar alte metode de a determina valoarea numărului π, deosebite de aceea stabilită de Arhimede. Se spera ca, în felul acesta, să se poată pătrunde mai adînc în taina care înconjura numărul π sau a aceleia care să decidă *dacă este posibil sau nu* să se construiască, folosind rigla și compasul, pătratul de arie egală cu a unui cerc dat. Și cum elanul cuadraturiștilor nu scădea de loc, matematicienii urmăreau să stabilească în toate lucrările despre cuadratura cercului ce se publicau, greșelile de raționament din care ar fi putut decurge concluzii false. Așa că, ei luau deocamdată atitu-

Coperta cărții
lui Saint-Vincent

dinc numai contra acestor *greșeli de raționament* care se puteau strecura în scrierile acelora *ce susțineau* sau *combăteau* posibilitatea cuadraturii cercului cu rigla și compasul. Și, întrucît asemenea erori de raționament erau posibile oricărui matematician, s-a întîmplat ca și matematicieni iscusiți să cadă victima cuadraturii cercului. Așa a fost, de pildă, cu matematicianul belgian Grégoire de Saint-Vincent (125), unul dintre cei mai culți și mai stimați savanți ai veacului al XVII-lea. În lucrarea lui, tipărită la 1647, în zece volume *in folio*, avînd peste 1 200 de file, intitulată *Opus geometricum, quadratura circuli et sectionum coni*[1] la care a lucrat întreaga lui viață, se găsesc cele mai interesante și riguros demonstrate teoreme de geometrie[2], dacă se exclud teoremele greșite în legătură cu cuadratura cercului. Această carte, de o valoare științifică de netă-

[1] „Opera geometrică despre cuadratura cercului și a secțiunilor conice". După cum se știe, *secțiuni conice* se numesc curbele: elipsa, hiperbola și parabola, ce se obțin din tăierea unui con circular drept cu un plan.

[2] Marele matematician Leibniz care a descoperit împreună cu Newton calculul diferențial și integral, a avut o deosebită admirație pentru Saint-Vincent, considerîndu-l ca pe unul dintre cei ce au pus bazele geometriei moderne.

Thomas Hobbes

găduit, a stîrnit o polemică ce a fost urmărită îndeaproape de toți geometrii din acea vreme. Am putea spune că, în acest asfințit al evului mediu, Grégoire de Saint-Vincent apare ca unul dintre ultimii cavaleri ai epocii sale. Un cavaler care și-a petrecut viața în cele mai aprige turnire numai și numai ca să prindă un zîmbet din ochii iubitei de care nu se va apropia niciodată să culeagă floarea ce ar fi aruncat-o cu entuziasm necunoscutului cavaler învingător... Căci, ce altă semnificație s-ar putea da acelor minunate teoreme pe care el le-a stabilit în cele 10 volume ale sale, numai și numai în vederea dovedirii posibilității cuadraturii cercului? El a fost un cavaler nefericit, dar care a știut să sufere înfrîngerea în tăcere. Cu un caracter diametral opus acelui al lui Grégoire de Saint-Vincent se înfățișează alt cavaler al cuadraturii cercului, filozoful Thomas Hobbes (126), contemporan acestuia. Prin atitudinea lui, el apare ca un frate geamăn al preaiscusitului hidalgo *Don Quijote de la Mancha*. Deși filozof, renumit prin vasta lui cultură, Hobbes a fost subjugat într-atît de cuadratura cercului, încît, așa cum Don Quijote nu-l credea pe Sancho Panza cînd acesta îi spunea că ceea ce i se părea lui că ar fi nechezat de cal

și răsunet de trîmbițe nu era în realitate decît behăit de oi și de berbeci, nici Hobbes nu dădea crezare matematicienilor care căutau să-i arate unde greșea în demonstrațiile lui despre posibilitatea cuadraturii cercului. Dimpotrivă, Hobbes s-a arătat a fi și mai îndîrjit decît Don Quijote, căci acela a consimțit să se întoarcă în satul lui atunci cînd a fost învins de Cavalerul Albei Luni, dar Hobbes a continuat să scrie fără răgaz, pînă în ultimul an al vieții lui, memorii peste memorii, învinuind nu numai pe geometri, dar chiar și geometria ! După trei secole, privește-i, dragă cititorule, ca pe *doi nefericiți campioni ai cuadraturii cercului !*

X

DOI NEFERICIȚI CAMPIONI AI CUADRATURII CERCULUI

„Ce dorești să afli e adînc și nesfîrșit
ca marea și ca cerul" ...

Mihail Sadoveanu

Era la Paris, în anul 1674, pe la începutul lunii noiembrie, în biblioteca savantului matematician și fizician Cristian Huygens.

— Dumneavoastră, domnule Leibniz? Vă credeam bolnav și de aceea m-am grăbit să vă trimit acasă răspunsul meu în legătură cu lucrarea despre cuadratura aritmetică. După cum v-am scris, ea m-a captivat ! (127)

— Eram într-adevăr bolnav, domnule Huygens, dar citind scrisoarea dumneavoastră am uitat de boală și clipele pînă să vă pot întîlni îmi păreau ceasuri... Vă cer îngăduință pentru felul meu așa de primitiv de a măsura timpul, acum cînd ați stabilit o unitate de măsură atît de precisă...

— De ce? Crezi că nu cunosc și cu această unitate variabilă de măsură a lui? Poate că luptam cu ea chiar atunci cînd mi-a venit ideea să folosesc pendulul drept orologiu ! În privința lucrării, țin să repet că invenția dumneavoastră am găsit-o foarte frumoasă. Într-o problemă care a aținat atîtea minți, ca aceasta a cuadraturii cercului, ați descoperit o nouă cale ce pare să dea oarecari speranțe de a ajunge la soluția ei adevărată... ați stabilit că cercul este, față de pătratul circumscris, ca și această serie infinită de fracții

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

față de unitate ; s-ar putea să nu fie imposibil să se afle suma acestei serii (128) și în consecință, cuadratura cercului.

Christian Huygens

— Nu vă pot spune cît mă încîntă aprecierile dumneavoastră asupra calității cuadraturii mele. Cînd mă gîndesc că cei ce au căutat cuadratura exactă a cercului nu au bănuit calea pe care ar putea spera să ajungă, mă bucur că sînt primul care a făcut aceasta (129).

— Totul depinde numai dacă veți putea afla cum se află suma acestei serii, așa cum ați procedat și pentru celelalte serii de aceeași natură.

— Deocamdată, această serie îmi pare foarte puțin accesibilă pentru însumare, domnule Huygens. Ea nu se aseamănă deloc cu cele de pînă acum și cred că ar trebui să-mi perfecționez metoda... Consider totuși ca o întîmplare fericită faptul că seria mea pune în evidență minunata analogie dintre cerc și hiperbolă !

— Aveți dreptate, căci atît lordul Brounker cît și domnul Mercator au găsit serii infinite de numere raționale, prin care au exprimat aria hiperbolei raportată la asimptote, dar nici unul dintre ei nu a stabilit aceasta și pentru cerc.

— Nu credeți că prin ea am reușit să transfer problema triangulării cercului, din geometrie, în aritmetica infiniților?

Nicolaus Mercator

— Ba da. Chiar dacă, în ceea ce privește însumarea acestei serii, imposibilitatea ar fi de netrecut, faptul că ați găsit o proprietate remarcabilă a cercului va rămîne celebru printre geometri. Îmi place această serie, domnule Leibniz. Are o structură elegantă, fiind alcătuită din șirul unor fracții cu semne alternante, avînd drept numărător unitatea și ca numitor numerele impare în ordinea lor crescătoare.

— Ideea mi-a venit anul trecut, pe cînd eram la Londra. Vorbind cu domnul Pell (130) despre metoda mea de însumare a seriilor de numere prin diferențele lor, el mi-a atras atenția asupra lucrării domnului Mercator (131). Citind-o, am căutat să urmez același drum pe care l-a folosit și el în calcularea ariei hiperbolei. La Londra, am aflat însă ceva ce m-a pus în dilemă. Îmi permiteți să vă spun despre ce este vorba?

— Bănuiesc ! Trebuie să fie în legătură cu neînțelegerea ce a existat între mine și domnul James Gregory cu privire la imposibilitatea cuadraturii cercului.

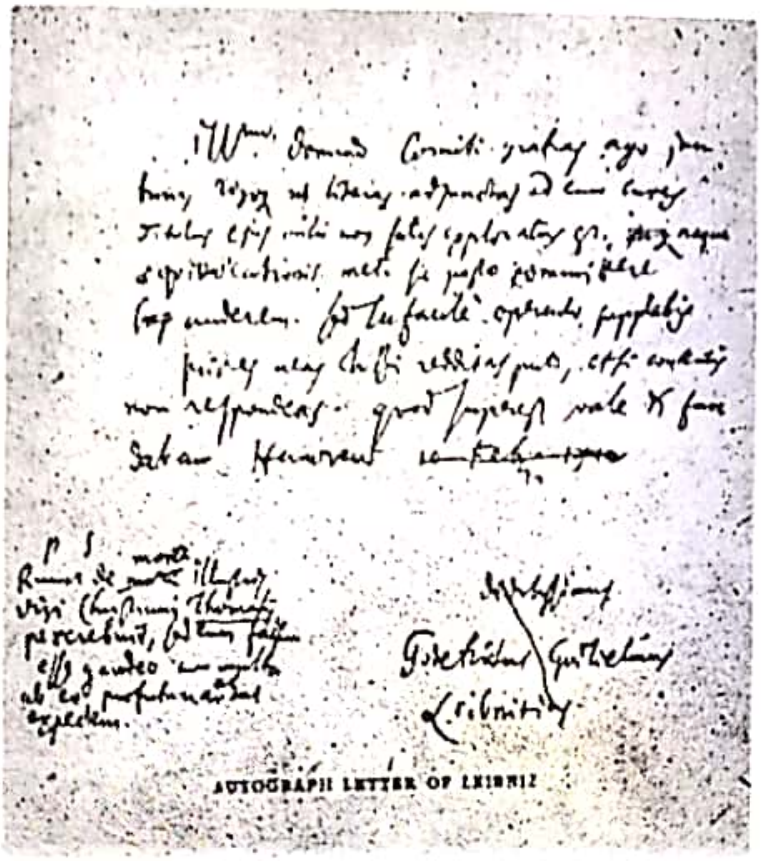
— Întocmai. Mi s-a vorbit despre cearta dumneavoastră cu domnul James Gregory și am citit o parte dintre scrisorile schimbate relativ la subiect (132). Or, păre-

Gottfried Wilhelm Leibniz

rile exprimate de dumneavoastră, acum 6—7 ani, în acele scrisori, la care aș adăuga și pe acelea exprimate chiar acum despre invenția mea, m-ar face să cred că sînteți un partizan al cuadraturii cercului, însă... dîrzenia cu care ați combătut odinioară cuadratura susținută de Grégoire de Saint-Vincent, îmi cere să înclin pentru părerea contrară...

— Te înșeli, domnule Leibniz, fiindcă nu-i vorba de nici o dilemă. Cercetările asupra cuadraturii cercului i-au făcut pe geometri să găsească lucruri așa de interesante, încît numai și pentru acest motiv de a nu-i lipsi de un exercițiu așa de folositor, aș apăra-o contra domnului James Gregory, care susține imposibilitatea ei analitică cu argumente șubrede. Pe lîngă toate acestea, eu cred că nici nu-i sigur faptul că cercul nu este comensurabil cu diametrul lui. Ca să pot admite afirmația domnului Gregory despre imposibilitatea cuadraturii, ar trebui să cunosc mai îndeaproape ce fel de număr este raportul dintre lungimea cercului și diametrul său și, cîtă vreme nu pot spune nimic despre natura acestui număr, nu pot pretinde că nu-i

Autograful
lui Leibniz



posibilă cuadratura cercului sau a hiperbolei, cu rigla și compasul !

— Totuși, dacă ținem seamă că *ați combătut* cuadratura lui Saint-Vincent, trebuie să admiteți că domnul Gregory nu s-a așteptat să aibă în dumneavoastră un adversar și această atitudine l-a surprins într-atît...

— Încît și-a pierdut cumpătul, s-a supărat și mi-a adus injurii (133).

— Mi s-au povestit neînțelegerile pricinuite din această cauză. Însuși domnul Oldenburg și-a amintit cu durere despre cei doi ani de supărare și mi-a declarat că toată lumea de la *Royal Society* era fericită cînd totul s-a terminat prin împăcare !

— Și eu am fost mulțumit, cu toate că, în realitate, fiecare am rămas pe pozițiile noastre de la început. Căci domnul Gregory, pe care eu îl admir ca pe un foarte talentat matematician și fizician, a preferat să se salveze de obiecțiile mele și ale domnului Wallis replicînd ceva prea neclar ca să admit că însemna ceva (loc. cit. nr. 133, p. 397).

— Am însă impresia că această ceartă ascunde și ceva nostim, că tocmai lucrările prin care ați combătut cuadratura lui Saint-Vincent și a adepților lui (loc. cit. 127 c,

James Gregory

vol. XI, p. 275 și 315 și vol. XII, p. 263) l-au îndemnat pe domnul Gregory să găsească demonstrația despre imposibilitatea analitică a cuadraturii.

— Aparențele, domnule Leibniz, fac să se creadă că eu aș susține două lucruri contrare. În realitate, eu apăr unul și același lucru : *corectitudinea raționamentului matematic*. I-am combătut pe amîndoi fiindcă fiecare dintre ei au făcut cîte o greșeală în raționamentele lor. Şi, în loc să observe aceasta, domnul James Gregory se supără pe mine pentru că *el presupunea* că eu sînt anticuadraturist și, prin aceasta, mă considera *obligat* să-i susțin părerile, cu greșeli cu tot !

— Recunosc că m-am grăbit și, de aceea, v-am judecat și eu greșit ! Vă cer iertare !

— Nu m-am supărat deloc. Numai tinerețea dumneavoastră poate fi așa de impulsivă și pe ea o consider ca singura scuză pentru un filozof. Iar în ce privește cuadratura lui Saint-Vincent, vă mărturisesc că niciodată un geometru nu și-a urmărit țelul cu mai multă perseverență și nu a zăbovit atît printre toți spinii geometriei ! Chiar dacă nu a reușit în scopul lui principal, recolta bogată a noilor adevăruri pe care le-a stabilit în această lucrare îl face

să merite un rang principal printre geometrii cei mai de seamă. De aceea, cu toată greșeala ei, lucrarea lui Grégoire de Saint-Vincent este o comoară prețioasă de adevăruri geometrice, de descoperiri importante și curioase.

— Sînt de aceeași părere și vă sînt recunoscător pentru că mi-ați recomandat și chiar mi-ați împrumutat această carte, cînd am venit întîia oară la dumneavoastră, acum doi ani. Cîte s-au schimbat de atunci în viața și gîndirea mea, datorită dumneavoastră și acelei cărți!

— Ce-i asta? O declarație de gratitudine?

— Nu, un simplu adevăr. Trebuie să admiteți că acum doi ani, cînd, ajungînd la Paris, am venit la dumneavoastră, eram un geometru autodidact, puțin experimentat; nu aveam răbdare nici măcar să urmăresc o demonstrație... Și cred că atunci cînd v-am prezentat mașina mea aritmetică, m-ați considerat cu mult mai capabil decît eram în realitate! Aceasta v-a îndemnat, probabil, să-mi arătați manuscrisul dumneavoastră *Horologium oscilatorium* pe care l-ați tipărit anul trecut. În timp ce discutam această lucrare, am roșit văzînd că știu așa de puțin despre *centrul de greutate*, dar dumneavoastră mi-ați lămurit totul în cîteva cuvinte, adăugînd, totodată, că Pascal a tratat foarte bine această chestiune...

— Curios, nu-mi amintesc despre aceste impresii! Țin minte că am admirat mașina dumneavoastră aritmetică și atunci cînd v-ați exprimat dorința de a studia geometria, v-am recomandat cartea lui Saint-Vincent, dar mă temeam că văzînd-o atît de voluminoasă să nu vă pierdeți gustul pentru geometrie!...

— Din contra, domnule Huygens. Cum am văzut-o, mi s-a părut că fiecare pagină mă chema și mă ademenea cu comori de nestemate. Am urmat cu interes drumurile străbătute de Saint-Vincent. Priveam cu nespusă plăcere sumele și sumele sumelor din care apăreau volumele... Unele probleme pe care le-a atacat el, mi-au plăcut așa de mult încît le-am urmărit mai departe, pe drumul urmat de Pascal. Vă mai amintiți, domnule Huygens, de după-amiezile cînd veneam ca să vă cer lămuriri și plecam abia noaptea tîrziu?

— Au fost clipe nespus de plăcute și pentru mine, de aceea nici nu vă lăsam să plecați mai devreme!

— Dacă ați ști cu cîtă sete am căutat eu un profesor ca dumneavoastră, nu m-ați mai fi acuzat că încerc să vă

fac declarații de recunoștință ! Îndată ce am trecut examenul de doctorat, am plecat la Nürnberg, căci auzisem că exista acolo o societate secretă a oamenilor de știință care lucrau în chimie și căutau piatra filozofală (134), însă societatea aceea nu m-a satisfăcut fiindcă nu am găsit acolo pe acela ce m-ar fi putut îndruma...

— Dar dumneavoastră nu aveți nevoie de îndrumare. Lucrarea pe care v-am citit-o dovedește că l-ați depășit pe Saint-Vincent.

— Mă încurajează cuvintele dumneavoastră și în ele descopăr ceva din căldura pe care am simțit-o în cartea lui Saint-Vincent. Cînd eram obosit de căutare, în rîndurile ei găseam clarificarea gîndurilor mele. Dacă geometria datorează mult lui Galilei și Cavalieri, cel mai mare ajutor i-a venit, cred eu, de la celebrul triumvirat : Fermat, Descartes și Saint-Vincent. Fermat a găsit metoda de maxim și minim, Descartes a văzut mijlocul de a exprima prin ecuații liniile din geometria obișnuită, iar Saint-Vincent, chiar dacă nu a găsit cuadratura cercului și a hiperbolei, a făcut alte numeroase și frumoase descoperiri. Datorită lui am înțeles și am îndrăgit geometria mai mult decît oricare altă știință... Cît de mult aș fi vrut să-l cunosc și să-i pot vorbi, măcar o dată !

— Această dorință nu vi se poate îndeplini căci Saint-Vincent nu mai este printre noi de 7 ani !

— Tot la Londra am aflat ceva, dar foarte vag și despre polemica dumneavoastră cu Saint-Vincent.

— Nici nu se putea să aflați mai mult, căci pe cînd s-a petrecut, dumneavoastră trebuie să fi avut vreo doi sau trei ani !

— Dar acum am destui ca s-o pot cunoaște ! Am citit și lucrarea lui și toate răspunsurile dumneavoastră... v-ar fi oare foarte greu să mi-o povestiți?

— Din anumite puncte de vedere da, dar am să o fac, considerînd-o ca o ispășire. Înainte de a vorbi, am să aduc aici cartea și scrisorile legate de această întîmplare. Iată, prima scrisoare am primit-o de la Marin Mersenne care, după cum știți, era atunci animatorul acelora ce manifestau un viu interes pentru noutățile științifice. Îmi scrie așa : „Dacă am putea găsi centrul de greutate al solidului născut din rotirea ruletei sau a trohoidei, atunci am putea avea cuadratura cercului pe care o dovedește Vincentio în cartea sa pe care a imprimat-o la Anvers. Poate că o și

Marin Mersenne

aveți? Ard de curiozitate să cunosc părerea dumneavoastră îndată ce veți examina memoriul său (135)".

— Modest memoriu, de numai 1 225 de pagini uriașe, a observat Leibniz.

— Peste cîteva zile, a urmat Huygens zîmbind observației, Mersenne a scris și tatălui meu: „Așteptăm aici cuadratura cercului care s-a tipărit la Anvers, scrisă de vecinul dumneavoastră, de Vincentio... Dacă domnul Descartes este dintre cei dintîi care o vede, judecata lui îmi va fi decisivă". După cum vedeți, domnule Leibniz, acum 27 de ani toți așteptau cu nerăbdare cartea lui sau referințe asupra ei, căci Mersenne întreținea o vastă corespondență și aș putea afirma că era un adevărat președinte al unei Academii universale. Dealtfel, și domnul Pascal spunea că el avea un talent deosebit în a pune probleme interesante. La scrisoarea primită de mine nu am putut răspunde decît peste un an, fiindcă nu am găsit cartea. Pe atunci eram la Breda și, cu toate că domnul Pell era acolo și o avea, nu a vrut să mi-o prezinte și nici să facă o apreciere definitivă asupra ei. Mi-am procurat-o abia cînd am ajuns la Haga. Atunci am putut-o examina în voie. Am găsit în ea lucruri foarte frumoase, mai ales

acelea despre volumele penelor cilindrice și parabolice, de care mă ocupasem și eu, și chiar îi comunicasem domnului Pell unul dintre rezultatele aflate acolo (loc. cit. nr. 127c, v. II, p. 566 și XI, p. 276). Cît privește cuadratura, nici unul dintre matematicienii pe care îi cunoșteam sau cărora le-am scris atunci, nu mi-au dat un răspuns lămurit și de aceea am cercetat-o eu, atent și îndelung. Am căutat să văd, mai întîi, în mod precis, ce înțelege Grégoire de Saint-Vincent prin *per ductionem plani in planum* (136) și după aceea am stabilit, pe rînd, din nou, propozițiile la care erau trimiterile din *Cartea a X-a*. Așa am găsit că propoziția 40 era greșită. Ea se sprijinea pe propoziția 38 a cărei demonstrație era aproape de neînțeles și de aici apărea defectul cuadraturii lui Saint-Vincent (loc. cit. 127 c, v. II, p. 566). I-am explicat acestea părintelui Mersenne, iar el mi-a răspuns astfel: „Domnule, pentru că sînteți unul dintre primii care au îndrăznit să-și dea avizul său asupra marii cărți a lui Saint-Vincent despre cuadratură, care este extrem de lungă și plictisitoare, vă voi spune mai întîi că el presupune o problemă mai grea decît aceea a cuadraturii, pe care nu o rezolvă, anume... Așadar, el nu a dat explicații nici prin linii și nici prin numere de transformarea cercului în pătrat, ceea ce ar fi trebuit să o facă, dacă ar fi fost sigur de cuadratura lui. Și apoi, mi s-a spus de curînd, că unul dintre geometrii noștri, care locuiește la Blaix, a găsit paralogisme în ea. Sper să-i scriu ca să mi le arate și, dacă o va face, vă voi înștiința imediat (loc. cit. 127 c. v. I, p. 89)".

— Mie nu-mi prea place cum s-a exprimat despre lucrarea lui Vincent, a spus Leibniz, după ce au comentat împreună teoremele indicate în scrisoare.

— Însă el reprezenta ecoul opiniei publice, a observat Huygens. Domnul Descartes îi scrisese în această privință nu numai lui, dar și profesorului meu, domnul Franz van Schooten (137), atunci la Leiden, iar el mi-a comunicat și mie scrisoarea domnului Descartes.

— Dar despre geometrul din Blaix, ce v-a scris?

— Nu mi-a mai scris nimic căci în acel an Mersenne a murit. Am aflat însă că era vorba de domnul Florimonde de Beaune, prietenul și comentatorul cărții lui Descartes. Însă, în cartea ce a apărut chiar în acel an, 1647: *Reflectiones Physico-mathematicae*, Marin Mersenne a menționat teoremele despre cuadratura cercului stabilite de Vincentio,

arătînd că ele nu erau adevărate fiindcă autorul presupunea că, dîndu-se trei mărimi oarecare și logaritmii a două dintre ele, se poate afla geometric logaritmul mărimii a treia. La aceste acuzații, a răspuns Alphonse Antoine de Sarassa, fost elev al lui Vincent, într-un *in folio* tipărit la Anvers în 1649, și apărarea aceasta a fost admirabilă (loc. cit. 127 c. v. I, p. 156). Între timp, eu am găsit adevărata greșeală a demonstrației. Mă ocupam cu teoremele în legătură cu determinarea centrelor de greutate la segmentele hiperbolice și eliptice. Lucrarea mea a fost examinată și de domnul van Schooten, care a insistat să o public cît mai repede. Atunci mi-a venit ideea să adaug, la sfîrșitul ei, critica cuadraturii lui Saint-Vincent, dar tatăl meu m-a sfătuit să nu o fac înainte de a-l întreba pe autor dacă-și menține afirmațiile din carte. L-am ascultat și astfel, în 6 octombrie 1651, i-am scris prima scrisoare. Nu-mi face plăcere să o recitesc, e ca o declarație de război... Îi ceream, pur și simplu, să recunoască în mod public că a greșit, căci altfel voi publica și cu rezultatele mele ! Desigur că tonul scrisorii mele l-a jignit. Se simte din răspunsul lui în care, după ce mă sfătuiește să-mi public lucrarea, adaugă : „Am îndemnat pe toți acești critici să-și publice sentimentele lor, dar toți bat în retragere, unii dintr-un pretext, alții din altul". La 25 octombrie i-am răspuns : „Îmi cereți să public ideile mele și eu le voi publica. Vă asigur că nu voi bate în retragere, după cum spuneți că fac alții. După mine, au făcut foarte rău". Poate că dîrzenia sau sinceritatea mea i-au plăcut căci am primit un răspuns amabil. Îmi spunea că m-am dovedit un tînăr energic, plin de talent și că este bucuros că nu are de-a face cu un fanfaron. Peste aproape două luni, Saint-Vincent a primit opusculul meu *Theoremata* care cuprindea, în a doua parte a ei ...

— *Exetatis*, adică *„Examenul ciclometriei savantului Grégoire de Saint-Vincent, publicată în 1647"*, a continuat Leibniz, emoționat. Luînd cartea de pe masă și răsfoind-o, a adăugat : — O cunosc bine ! Iată introducerea : *Ad lectorem*, din care dați-mi voie să citesc ultimul pasaj, fiind foarte curtenitor : „N-am încercat să micșorez autoritatea unui om serios și erudit, ci dus de frumusețea cauzei, am crezut că pot expune liber și fără ofensă, ceea ce am găsit. Și aceasta, cu atît mai mult, cu cît el însuși, într-una din scrisorile pe care le schimbăm din timp în timp, mi-a

spus-o deschis și chiar mi-a cerut să public comentariile pe care le-am scris. Am primit cu bucurie și cu recunoștință, așa cum o merita, acest deosebit semn de nevinovăție și sper să arăt, prin modestia criticii mele, cît de mult prețuiesc să fiu considerat ca un prieten al savantului autor. Omenia de care a dat dovadă pînă acum mă face să nu aștept de la el altceva decît un răspuns modest și fără asprime, dacă este de părere că ar fi să-mi opună ceva sau să primească și să recunoască lucrurile mai adevărate pe care le-am stabilit eu acum, în loc să le stabilească alții mai tîrziu".

— Comunicîndu-i această lucrare, am sperat, domnule Leibniz, că am să-l conving de insuficiența cuadraturii sale (138) și am așteptat judecata lui, măsurînd și eu timpul cu acele unități capricioase de care mi-ai vorbit adineauri. I-am scris de mai multe ori dar nu mi-a răspuns decît atunci cînd a primit lucrarea mea, adică în 18 februarie 1652. Iată cum începe: „Tonul din scrisoarea dumneavoastră pare plîngăreț, vaiet și imputare, așa cum izbucnește adesea între prieteni..." Promite să satisfacă dorința, atunci cînd va avea timp să răspundă la toate îndoielile și obiecțiile care i-au fost transmise, dar n-am mai primit nici o scrisoare, deși îl rugam să-mi arate, doar în trei cuvinte, unde m-am înșelat! La vreo 6 luni după aceea ne-am întîlnit. Plecasem în Flandra cu tata și înainte de a ajunge la Anvers l-am rugat să ocolim prin Gand, unde se afla el. Ducea o viață retrasă în casa iezuiților de acolo. Atunci avea vreo 67 de ani. Camera îi era plină de cărți, iar pe masă se aflau foile pe care le umpluse cu figuri și formule. Cînd m-a văzut, mi-a zîmbit cu prietenie și mi-a spus: „Cît de grăbit ești să afli răspunsul meu, tinere domn!" Aveam impresia că se juca cu mine, căci despre cuadratură nu am putut afla nimic precis de la el. Cînd ne-am despărțit, a adăugat: „Oricare vor fi relațiile noastre matematice, să știi că te prețuiesc mult și că îți voi fi mereu un prieten adevărat". Și în adevăr, pînă la moarte mi-a rămas unul dintre cei mai buni prieteni, deși eu nu mă pot lăuda cu purtarea care am avut-o față de el. Peste cîteva luni am auzit că elevul lui, Aynscom, a pregătit o lucrare care combate *Exetasis*. Nu mult după aceea mi-a scris și cunoscutul geometru Aloysius Kinner din Loewenturn [1], alt fost elev și prieten al lui Vincent,

[1] Praga de azi

atrăgîndu-mi atenţia că nu-i adevărat că el a preferat prima cuadratură, cum am afirmat eu în *Exctasis*, ci pe cea de a doua, care este mai uşoară, arătîndu-mi că va rezuma şi explica lucrarea profesorului său.

— Nu-i cumva vorba despre *Elucidatio geometrica Problematis Austriaci sive quadratura circuli...*? [1]

— Ba da. El mi-a trimis curînd cartea, iar eu i-am răspuns, arătîndu-i locul precis unde este greşită şi această demonstraţie, dar mi se pare că nu am reuşit să-l conving (loc. cit. 125, b, p. 266). Tot în acel an, Leotand Vincent a publicat la Lyon o altă lucrare, intitulată *Examen circuli quadraturae*, în care atacă şi el cuadratura lui Saint-Vincent. Au mai atacat-o apoi şi alţii, printre care şi Andrea Taquet, profesor de matematici la Louvain, acela despre care vă spuneam că a încercat să mă convertească la catolicism.

— Ce frumoasă a fost atitudinea lui Saint-Vincent, domnule Huygens! Atîţia matematicieni se agită, scriu scrisori, publică broşuri sau pamflete şi el tace!

— Pe mine însă m-a scos din sărite şi, la începutul anului 1654, nemaiputînd răbda tăcerea lui i-am scris din nou, întrebîndu-l unde-i apologia scrisă de Aynscom. Mi-a răspuns imediat, arătîndu-mi că elevul lui a fost bolnav, după aceea au mai trecut doi ani şi, atunci cînd nu mai aşteptam, am primit un exemplar cu răspunsul scris de Aynscom.

— Cunosc şi această lucrare, domnule Huygens. Dealtfel, o văd şi aici. În aceste 182 pagini *in folio*, elevul încearcă să-şi apere profesorul de toţi duşmanii lui. Dumneavoastră personal, găsesc că autorul vă aduce un elogiu, observînd că „deşi cel mai tînăr dintre toţi, sînteţi primul care aţi folosit în combaterea cuadraturii, metode demne de un geometru“!

— Aşteptasem atîta vreme această lucrare încît, atunci cînd am văzut-o m-am gîndit că nu mai are rost să răspund. De multă vreme, judecători competenţi îmi dăduseră dreptate mie, aşa că nu mai aveam nimic de adăugat. Totuşi, după ce am citit lucrarea, dorinţa de a-i răspunde a fost mai tare decît hotărîrea mea şi, într-o lună, răspunsul era gata tipărit. Nu doream atîta să-i arăt greşeala pe

[1] **Explicarea geometrică a problemei austriece despre cuadratura cercului.**

care o comitea, ci, mai ales, să-i iau apărarea domnului Roberval, pe care-l implica fără rost, într-o scrisoare publicată acolo. I l-am trimis imediat lui Aynscom, dar nu mi-a mai răspuns, deși în anul următor i-am mai scris o dată ! Ba mai mult chiar, și alți iezuiți, cu care fusesem înainte în corespondență, nu mi-au mai răspuns cînd le-am trimis celelalte lucrări ale mele. Unii dintre ei, pe care nici nu i-am cunoscut personal, mi-au devenit adversari îndîrjiți ce au căutat să-l răzbune pe Saint-Vincent. De pildă, acum 10 ani, cînd K. Shottus a publicat cartea sa *Technica Curiosa*...

— Am citit-o și eu, dar nu țin minte, — deși pe atunci nu vă cunoșteam — , să fi întîlnit vreo formulă jignitoare, la adresa dumneavoastră !

— Nu mă refer la acest mod de răzbunare, ci la altul mult mai subtil. Dacă vă amintiți, el vorbește despre un anumit tratat care cuprinde descrierea și construirea orologiului cu pendulă însă autorul acestui tratat nu este pomenit, deși în carte a apărut pînă și o figură pe care am executat-o eu în 1660 ! Același procedeu l-a folosit apoi și Kircher care laudă și el invenția orologiului cu pendulă (loc. cit. 127 c, v. III, p. 590 și V, p. 387), invenție al cărei autor rămîne tot necunoscut ! Singur Saint-Vincent s-a purtat admirabil ! Deși nu mi-a scris nimic în legătură cu cuadratura, cînd i-am trimis lucrarea mea *Horologium* mi-a răspuns îndată, foarte călduros, arătîndu-mi că i-a plăcut invenția mea. După cîțiva ani, atunci cînd am fost pus și eu într-o situație oarecum asemănătoare cu aceea pe care o avusese el, am înțeles cîtă durere i-a pricinuit combaterea mea și i-am admirat puterea de stăpînire de care a dat dovadă !

— Vreți să faceți aluzie la lucrările dumneavoastră în legătură cu descoperirea inelului lui Saturn?

— Da. Altădată vă voi povesti despre încurajarea și apărarea pe care mi-a luat-o el, cînd iezuiții astronomi din Roma au încercat să se opună observațiilor mele cu privire la inelul lui Saturn. Ce scrisoare prietenească mi-a scris atunci cînd l-am învins pe Honoré Fabri, capul acelei coaliții îndreptată contra mea !... Sau scrisorile pe care mi le-a trimis cînd a fost demascat, de către Gilles, ceasornicarul necinstit ce construise un orologiu după descrierea mea și l-a prezentat Papei, ca și cum ar fi fost invenția lui (139) !

John Wallis

— Asemenea scrisori sînt, în adevăr, cea mai bună dovadă de prietenia lui Saint-Vincent, iar dacă despre cuadratură nu v-a mai scris nimic, înseamnă că și-a recunoscut greșeala. Cîtă deosebire între el și domnul Hobbes !...

— Domnul Hobbes? Mă faceți să rîd cu poftă despre această apropiere ! Ce v-a făcut să vă amintiți despre el, tocmai acum?

— Comportarea lui în problema cuadraturii cercului, care se arată diametral opusă aceleia a omului pe care îl admirăm amîndoi și despre care am vorbit !

— Aici nu am să te contrazic căci, deși domnul Hobbes este un filozof remarcabil, atitudinea lui în problema cuadraturii cercului a devenit, pur și simplu, scandaloasă ! E drept că experiența mea cu domnul Gregory mă îndeamnă să înțeleg că domnul Hobbes poate să-și iasă din fire și să-l atace pe domnul Wallis, care nu se lasă nici el mai prejos, dar în ultima vreme a început să atace chiar *matematica*, numai ca să-și afirme cuadratura și asta, de ! parcă e prea de tot pentru un filozof ! Poate l-ați cunoscut cînd ați fost la Londra?

— Da. Parcă-l văd înaintea mea : înalt de aproape doi metri și cu toate că avea 80 de ani, se ținea foarte

drept. Avea o frunte largă de adînc cugetător, ochii îi erau umbriți de niște sprîncene stufoase de culoarea alunei, fața rotundă cu o bărbiță ascuțită... Cred însă că geometrii abili nu se mai sinchisesc nici de obiecțiile domnului *Joseph Scaliger contra lui Arhimede* și nici de acelea ale domnului *Hobbes contra lui Euclid*, fiindcă ei sînt foarte siguri de demonstrațiile pe care le-au dat acești mari gînditori (140) !

— De așa ceva nu poate fi vorba și tocmai de aceea atitudinea lui îmi pare așa de absurdă ! Cînd domnul Hobbes a publicat prima sa lucrare despre cuadratura cercului, am combătut și eu paralogismele sale, alături de domnul Wallis și de alți matematicieni. Dealtfel, pretenția domnului Hobbes de a fi stabilit cuadratura cercului, era pe atunci discutată în multe dintre scrisorile matematicienilor. Acum domnul Hobbes s-a supărat și pe mine și nu-mi mai scrie, așa cum o făcea pe cînd și-a început cariera de matematician !

— Oare dumneavoastră considerați adevărată povestea cu geometria, odată ce vorbiți de *un început al carierei lui de matematician*?

— Chiar așa a fost, domnule Leibniz ! A mărturisit-o singur într-un cerc destul de larg, pe cînd era la Paris, în chilia lui Mersenne. Faptul trebuie să se fi petrecut prin 1634 căci atunci a fost el întîia oară la Paris. În 1655, cînd a scris *De corpore*, se considera un geometru destul de abil ca să consacre un capitol întreg din cartea sa, *cuadraturii cercului*. Aflați însă că nu găsesc nimic de mirare în faptul că domnul Hobbes nu auzise nimic despre geometrie pînă la vîrsta de 40 de ani ! Știți, probabil, că Universitatea din Oxford a căpătat un profesor de geometrie abia după 1619, cînd el își terminase studiile? Fiind la Paris, a spus-o el, și eu îl cred, a văzut pentru prima oară *Elementele* lui Euclid pe o masă, în biblioteca unui prieten la care fusese invitat. Volumul era deschis la *propoziția 17 din Cartea I*. Citind-o mai mult de curiozitate, și-a zis mirat : „Cum poate afirma Euclid așa ceva?“ De aceea, a continuat să citească demonstrația, iar cînd a terminat-o, a rămas înmărmurit de o asemenea metodă de a stabili adevărul, metodă care constă în a te sprijini pe un alt adevăr dovedit mai înainte ! Așa s-a îndrăgostit el, *fulgerător*, de geometrie !

— Se vede că această dragoste tardivă i-a tulburat mințile ! Și cum este arțăgos din fire, nu a putut ierta Oxfordului că nu l-a învățat geometria la vreme ! În prima lucrare ce l-a consacrat ca filozof, *Leviathan*, el atacă universitățile arătînd că ele lasă tinerii neinițiați în științele moderne, că cei mai mulți consideră geometria ca „ars diabolica" și pe profesorii ce o predau ca „înfrățiți cu diavolul", și aceasta o făcea neținînd seamă că acum studenții din Oxford învață geometria !

— Domnul Hobbes a repetat atacul contra universităților și în *De Corpore* și cred că are dreptate să o facă ! Dar pe mine, ca matematician, m-a delectat mai mult capitolul despre cuadratura cercului, pe care pretinde că a rezolvat-o. Iar domnul John Wallis, în calitatea lui de profesor de geometrie la Oxford, din 1649, era obligat să răspundă și să arate ce greșeli ridicole de raționamente făcea. Cartea lui din 1659 : *Elenchus geometria Hobbianae*[1] este cu adevărat o *perlă*.

— Mă tem că domnul Hobbes nu a putut înțelege savanta argumentație a domnului Wallis și poate de aceea și-a menținut părerile cu un curaj admirabil, respingînd-o cu înverșunare.

— Desigur. Din punctul lui de vedere, argumentele ce le aduce par bine susținute, numai că ele nu rezistă și în matematici unde pe lîngă logică și inteligență, trebuie să ai și un bagaj de cunoștințe ! Neavîndu-le, domnul Hobbes i-a procurat el însuși domnului Wallis un nou prilej de atac la care domnul Hobbes a ripostat din nou ! Drept să vă spun, răspunsurile domnului Hobbes au început să mă amuze și nu mai are rost să menționez cît le prețuiesc pe ale domnului Wallis ! Ați observat, cred, cu ce măiestrie mînuiește domnul Wallis floreta zeflemelei? De aceea, chiar cu riscul de a deveni absurd, vă mărturisesc că, ori de cîte ori încercam să mă amestec, combătînd paralogismele domnului Hobbes, nu știam dacă fac bine sau nu, căci n-aș fi dorit să-l fac să tacă (loc. cit. nr. 127 c, v. IV, p. 149 și 171) !

— În privința aceasta, ați putea fi fără griji. Domnul Hobbes nu numai că nu tace, dar se înflăcărează și devine din ce în ce mai elocvent și mai înverșunat. Părîndu-i-se prea neînsemnată lupta cu matematicienii în viață, a

[1] **Perle ale geometriei hobiene.**

extins acum atacul pînă și asupra lui Euclid! Ce haz se mai făcea, anul trecut la Londra, de *Lux mathematica* și mai ales de răspunsul domnului Wallis la *Lux* publicat în *Transactions*.

— Atunci, stați să vă citesc ce mi-a scris de curînd domnul Oldenburg: „Bietul domn Hobbes, nemaiaflînd în Anglia prea mulți oameni care să-l aprobe, apelează la cei din străinătate, adresîndu-le lor lucrările lui“ (loc. cit. 127 c, v. VII, p. 6). Mai departe adaugă: „iar teama că nici printre ei nu se va mai găsi nimeni, îl determină să facă apel la posteritate”. Eu însă îi păstrez domnului Hobbes o vie recunoștință, căci numai datorită lui am putut gusta atîtea scrieri delicioase și apoi nimeni nu-l întrece pe domnul Wallis în felul cum știe să dărîme construcțiile domnului Hobbes și nici în observațiile lui neașteptate sau în descoperirile noi, pe care le strecoară printre rîndurile lui pline de vervă! Totuși, stau și mă întreb cîteodată, cum se poate ca un om de cultura domnului Hobbes, cu puterea lui de raționament, să nu înțeleagă, să nu vadă, paralogismele pe care caută să i le lămurească atîția matematicieni destoinici?

— Dar nu ați observat oare, domnule Huygens, că mulți oameni nu răspund la cele ce le spunem noi, ci la cele ce își închipuie ei că le-am spus?

— Cred că aveți dreptate, domnule Leibniz, și poate că în această observație a dumneavoastră trebuie să caut răspunsul la nedumerirea mea. Oricum însă, cu aștept mereu, cu nerăbdare, noile scrieri ale domnului Hobbes! Nu credeți că merită omagiul curiozității, această patimă tîrzie a colegului dumneavoastră *numai* întru filozofie?

— După părerea mea, domnul Hobbes este cu adevărat un mare filozof care, prin asemenea scrieri cu caracter matematic, își micșorează prestigiul. Dar văd că iar s-a înnoptat de-a binelea și iar v-am reținut prea mult. Vă asigur că n-am să uit aceste ore, petrecute în tovărășia dumneavoastră, *din nou printre cuadraturiști*!

XI

DIN NOU PRINTRE CUADRATURIȘTI

„Matematicile, privite corect, nu posedă numai adevărul, dar și suprema frumusețe, frumusețea rece și austeră ca aceea a sculpturii ... de o puritate sublimă și capabilă de o perfecțiune severă, așa cum numai arta cea mai înaltă o poate manifesta".

Bertrand Russell

Împăcarea prin care s-a încheiat, după doi ani de controverse, cearta dintre Huygens și Gregory, în așa fel că „fiecare a rămas pe poziția de la început", te-a lămurit cred, dragă cititorule, că pînă la sfîrșitul secolului al XVII-lea, nici un matematician nu era în stare să hotărască dacă era sau nu posibilă cuadratura geometrică a cercului. Motivul ți l-a arătat Huygens, observînd că *nu cunoștea adevărata natură a numărului* π. Față de secolele trecute, se făcuse totuși un mare pas înainte prin descoperirea, în prima jumătate a veacului al XVII-lea, a *geometriei analitice* de către Fermat și Descartes. Aceasta, pentru că problemele de geometrie se puteau discuta acum și din punct de vedere algebric și tot astfel și soluțiile lor numerice; drept urmare, numerele iraționale pierd ceva din misterul ce le înconjura. Un exemplu te face să înțelegi mai bine cum se putea pune acum problema cuadraturii cercului. Să începem mai întîi cu ceva mai simplu, anume cu numărul irațional $\sqrt{2}$. Acest număr nu se poate exprima prin cîtul dintre două numere întregi, iar în numărul infinit de zecimale ce se succed după unitate ($\sqrt{2} = 1{,}41...$) nu s-a putut stabili nici un fel de ordine sau lege după care să se știe dinainte care este cifra care urmează, așa cum se întîmplă în cazul numerelor raționale [1].

[1] Orice *număr rațional*, dacă este pus sub formă de fracție zecimală, poate fi reprezentat fie printr-o fracție zecimală *finită* $\left(\frac{1}{2} = 0{,}5\right)$ fie printr-o fracție zecimală infinită. În acest din urmă caz, această *fracție*

Totuși, lungimea segmentului care are drept măsură $\sqrt{2}$ se poate construi cu rigla și compasul foarte simplu: se desenează un pătrat de latură egală cu unitatea de lungime și apoi se măsoară mărimea diagonalei lui.

În mod empiric, acest lucru era știut și de vechii greci, dar ei nu i-au putut da vreo explicație. Nu a găsit-o nimeni pînă cînd nu s-a creat geometria analitică. Acum însă, lucrul se explică destul de simplu: $\sqrt{2}$ este rădăcina ecuației $x^2 = 2$ și această ecuație reprezintă *un cerc*, așa că pentru a-l construi este necesar compasul! De aici se trage și o concluzie generală, anume: știind că orice cerc are ca expresie algebrică o anumită formă de ecuație de gradul al doilea, rezultă că toate numerele iraționale care provin din orice fel de combinație, între asemenea ecuații de gradul al doilea, *în număr finit, se pot construi cu rigla și compasul*! Invers, orice construcție care se reduce la intersecții de linii și cercuri (adică se poate realiza cu rigla și compasul) se exprimă algebric prin rezolvarea unui *șir finit de anumite* ecuații de gradul doi sau de gradul unu și doi.

Iată, dragă cititorule, *amănuntul nou* care va conduce treptat pe matematicieni la dezlegarea misterului ce înconjoară cuadratura cercului. Chiar dacă metoda de cercetare nu-i încă definitivată rămîne *un fapt stabilit*, acela că natura numărului π trebuie cercetată nu numai pe *cale geometrică*, ci și pe *cale analitică* (adică prin calcul). Cercetările nu se vor mai face la întîmplare, ci grupate în jurul următoarelor întrebări:

1. Nu există oare, în succesiunea zecimalelor prin care se exprimă numărul π, vreo regularitate, adică nu se poate observa o perioadă, fie ea și oricît de lungă? În acest caz, numărul π ar fi rațional. Dar, ca să se poată stabili aceasta,

---

zecimală infinită se caracterizează printr-o anumită regularitate în distribuția cifrelor, *o grupare a lor ce se repetă periodic*. De exemplu: numărul rațional $\frac{3}{7}$ poate fi transformat în fracție zecimală, împărțind 3 la 7. Se observă că prin împărțire se formează grupul de cifre 428571 care se repetă la infinit. Acest grup se numește *perioada* numărului rațional dat și, prin urmare, el se scrie $\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571\ldots\ldots$ Un număr zecimal la care nu se constată o asemenea periodicitate în succesiunea cifrelor, nu este rațional, ci irațional.

nu sînt de ajuns numai cele 35 de zecimale cunoscute pînă acum. Ar trebui mai multe, o sută, două, trei, poate chiar o mie sau cîteva mii ! Iată profilîndu-se din nou la orizont *goana după zecimalele lui* π, dar de data aceasta nu o goană insolită, sete de aventură, ci o cercetare sistematică și îngrijită, urmărind un scop precis.

2. Nu cumva numărul π face parte din categoria numerelor iraționale de natura lui $\sqrt{2}$, adică să fie provenit din cine știe ce combinație, oricît de fantastică, a unor ecuații de linii drepte (ecuații de gradul I) și de cercuri (ecuații de gradul II cu anumite caracteristici)[1] ? Dacă s-ar putea stabili aceasta, atunci cuadratura cercului cu rigla și compasul ar fi posibilă !

3. Care este natura *numerelor iraționale* și cum poate fi pusă ea în evidență? Că existau mai multe feluri de numere iraționale devenise un fapt sigur tocmai pentru că se întîlneau curbe ale căror ecuații erau polinoame algebrice de ordin mai mare decît doi sau nici nu erau algebrice ! Iar numărul π, ce fel de ecuație satisface, o ecuație algebrică sau nu? Ca să se poată răspunde la aceste întrebări, alături de joaca nesăbuită de-a cuadratura sau de certurile dintre cuadraturiști și necuadraturiști, în secolele XVIII și XIX, problema cuadraturii cercului devine un stimulent și o directivă în activitatea matematicienilor. Așa că, dacă nu ți-ai pierdut încă răbdarea sau curiozitatea, atunci te poftesc, dragă cititorule, să urmărești cu atenție cum se va desfășura de aici înainte povestea numărului π, căci cine știe dacă surprizele nu vor întrece așteptările !

Îți mai amintești că Willebrod Snellius a stabilit o metodă prin care se puteau determina cele 35 de zecimale ale numărului π într-un mod mai simplu? La început, matematicienii au rămas încîntați de această descoperire dar cînd au privit lucrurile mai îndeaproape, au găsit că formula propusă de Snellius nu era destul de riguros demonstrată și deci nu se putea avea încredere în ea pînă nu era îndeplinită și această condiție. Abia peste vreo

---

1 O ecuație de gradul al doilea în x și y are următoarea formă generală : $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Condiția ca ea să reprezinte un cerc este exprimată prin următoarele relații între coeficienții acestei ecuații : $A = B \neq 0$; $C = 0$.

30 de ani a fost găsită demonstrația impecabilă, de către Huygens, și publicată, împreună cu alte teoreme din care se desprindeau diverse metode geometrice care permiteau construirea cu rigla și compasul ale unor segmente ce puteau *aproxima* arcul de cerc (141), în cartea *De circuli magnitudine inventa*, apărută în 1654. Dintre teoremele stabilite aici de Huygens, apare una care restrînge și mai mult limitele între care poate fi socotită lungimea arcului de cerc, teoremă ce i-a permis lui Huygens să determine cele 9 zecimale ale lui π folosind numai latura hexagonului regulat și nu a poligonului cu 96 de laturi de care se folosise Snellius (142). În cercetările asupra cuadraturii cercului, lucrările lui Huygens reprezintă o înnoire ; o alta se datorează metodei propuse de James Gregory (nota nr. 132). Chiar și Descartes a imaginat o metodă ingenioasă de a determina numărul π, dar aceasta nu a putut fi cunoscută decît în 1701, cînd s-au publicat operele lui postume. Reluată de marele matematician Leonard Euler, în 1763, și apoi de alții, ea este cunoscută acum sub numele de *metoda izoperimetrelor* [1] și are la bază următoarea idee : în loc să se stabilească valoarea numărului π cu ajutorul poligoanelor regulate, ale căror perimetre tind către lungimea cercului, se folosesc poligoane regulate cu n și $2n$ laturi avînd *același perimetru*. În acest caz, numărul π apare din relația ce leagă razele cercurilor înscrise și circumscrise lor atunci cînd numărul laturilor crește nedefinit (143). Un alt matematician de seamă, A.M. Legendre, a mai stabilit o altă metodă ce s-ar putea numi, prin analogie, *metoda izoariilor* [2] și a găsit astfel valoarea numărului π (144). Dacă ne-am opri aici, propunîndu-ți să reflectezi asupra îmbunătățirilor sau noutăților în problema numărului π aduse de cercetătorii pe care ți i-am numit, s-ar putea să fi băgat de seamă, cititorule, că *metoda lui Arhimede* rămîne rădăcina din care s-au dezvoltat aceste lăstare, că toate aceste metode sînt numai *variații pe aceeași temă*, avînd ca *laitmotiv* metoda lui Arhimede ! Ele prezintă doar avantajul că fac mai ușoare calculele zecimalelor lui π sau le verifică, în comparație cu acelea obținute pe altă cale, dar prin ele nu se poate *pătrunde mai adînc în natura numărului* π. Prin acestea nu, dar prin

[1] Adică a poligoanelor cu *același perimetru*.
[2] Poligoane avînd *aceeași arie*.

altele? De pildă, ce-ai zice să facem cale-ntoarsă înspre metoda lui Viète? Viète, prin firea lui, era mai mult analist decît geometru și privind mai atent la formula prin care a exprimat raportul dintre aria pătratului și a cercului circumscris lui, poți constata că el a stabilit următoarea formulă trigonometrică formată dintr-un produs infinit de factori :

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots$$

Înlocuind cosinusul arcelor respective prin valorile lor, formula precedentă capătă forma :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots}$$

Curioasă formulă, nu? Parcă ar fi o vizuină bizară cu mii și mii de încăperi în care să se poată ascunde numărul π. Dacă îl cauți sub primul radical el fuge, printr-o portiță nevăzută sub cel de al doilea radical și, dacă-l urmărești mai departe, găsește adăpost în al treilea, păzit la intrare de fracția $\frac{1}{2}$. Dacă totuși pătrunzi și în al treilea radical, altă oprire te așteaptă în fața celui de al patrulea și pînă ajungi acolo, el a fugit mai departe, tot mai departe, fără să poți spera să-i dai vreodată de urmă !

Nu-i așa că-i impresionant să ai în fața ochilor această expresie care îți apare ca o cărare deschisă înspre infinit? Însuși numărul π ți se înfățișează acum altfel : inversul lui, luat de două ori, se poate exprima numai prin fracția $\frac{1}{2}$, ce-i drept luată de un număr infinit de ori, dar după o lege pe care o observi dintr-o dată, așa încît, dacă ai vrea să știi cum arată factorul al 50-lea sau al 500 000-lea, l-ai putea scrie, fără să trebuiască să-i formezi mai întîi, pe rînd, pe cei dinainte ! Primul factor este format dintr-un singur radical, al doilea din doi radicali suprapuși așa că, în al 50-lea factor vei scrie pe rînd, exact cum l-ai scris pe al doilea factor, 50 de radicali unul în altul și tot așa înainte ! Scrierea lor nu-ți dă nici o bătaie de cap, mai greu este cu timpul necesar ca să-i scrii !

Dar și mai greu decît aceasta este însăși problema ce-ți este pusă în față. E vorba de un *produs infinit* de factori, un produs pe care *niciodată, niciodată* și *nimeni* nu va putea sfîrși să-l calculeze, chiar dacă ar fi început de cînd a

început lumea și ar continua la nesfîrșit ! Aceasta este semnificația *infinitului*, — fără de sfîrșit — și atunci cum se poate stabili care este valoarea acestui produs ce nu se poate efectua? Ei bine, totuși se poate efectua și acesta este titlul de glorie al matematicienilor din secolul al XVII-lea, că ei au reușit să treacă prăpastia dintre *finit* și *infinit* pe o punte care poartă numele de *trecere la limită* (145). Peste ea a trecut și Wallis, descoperind un alt produs infinit prin care se exprimă numărul π. Acesta este cu totul altfel:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdots}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots}.$$

Este o fracție formată din pătratele numerelor naturale, la numărător produsul celor pare, la numitor al celor impare. Această fracție unică, avînd termenii ei formați din produse infinite, se poate scrie și ca un produs infinit de fracții simple, în care legea de formare a factorilor este aproape evidentă:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots$$

Numărul 1 de la numitor a fost scris numai o dată, astfel că fracțiile ce urmează au ca numărător un număr par, iar numitorul impar, dar în așa fel că se găsesc mereu alăturea cîte două fracții avînd același numărător par, iar ca numitor cele două numere impare între care se află el cuprins (146).

Cine este numărul π? Nici acum nu se putea spune prea mult și totuși această diversitate a produselor infinite fascina. Iată că și Euler le caută și le găsește. Produsele lui infinite par a fi niște jucării cu numere, meșteșugite cu măiestria aceluia care, nemaiputînd vedea clar lucrurile din preajma lui, le putea întrezări pe acelea de la infinit:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdots$$

sau:

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdots$$

Însă Euler nu era omul *jumătăților de măsură*. Produse infinite legate de numărul π a găsit multe și nu-i cazul să le enumerăm aici pe toate, fiindcă acestea nu au fost

singurele expresii infinite cu care și-a găsit el de joacă. În cartea lui Wallis, apărută în 1655, cu titlul *Arithmetica infinitorum*, pe care Euler trebuie să o fi prețuit îndeajuns și în care a găsit el multe elemente de inspirație, se afla și o altă expresie numerică infinită a numărului π, anume această fracție continuă nelimitată pe care autorul o atribuia prietenului său William Brouncker, fără să menționeze nimic în privința modului cum a fost stabilită (147) :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

Formula aceasta a așteptat 120 de ani pînă ce Euler i-a dat demonstrația și, totodată, i-a mai adăugat altele (148), ca de pildă :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1\cdot 3}{4 + \cfrac{3\cdot 5}{4 + \cfrac{5\cdot 7}{4 + \cfrac{7\cdot 9}{4 + \cdots}}}}}$$

sau

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{1\cdot 3}{8 + \cfrac{3\cdot 5}{8 + \cfrac{5\cdot 7}{8 + \cfrac{7\cdot 9}{8 + \cdots}}}}}$$

Dacă produsele infinite păreau niște porți care te ademeneau să le treci fugărind acest număr enigmatic înspre infinit, oare aceste fracții continue nu-ți fac impresia unor scări pe care le-ai putea coborî, sărind în gînd, treaptă cu treaptă, spre grota fără fund a infinitului? Da, dragă cititorule, poți alerga, poți sări spre infinitul ce te-nconjoară din toate părțile fără ca numărul π să se lase încă ademenit ! Spun *încă* și ai să vezi că nu te-nșel, căci pînă la urmă se va găsi ac și pentru cojocul lui. Deocamdată, produsele și fracțiile continue infinite din care matematicienii, fermecați de vraja lor, i-au croit numărului π haine uxoase, cu trene impunătoare, s-au dovedit a nu fi practice. Ele nu ofereau un mijloc mai simplu și mai la îndemînă de a calcula zecimalele lui decît acela oferit de procedeele izvorîte din metoda lui Arhimede. Dar, dacă aceste haine nu erau practice, nu rezultă de aici că nu au fost necesare. Însăși bucuria de a le admira frumusețea, *de o*

Leonard Euler

puritate sublimă și capabilă de o perfecțiune severă, așa cum numai arta o poate manifesta, ar fi de ajunsă plată pentru toate nopțile de veghe și zilele neîntrerupte, petrecute de cei ce le-au croit și le-au dat la iveală, dar ele au însemnat cu mult mai mult : ele au arătat că numai pe această *cale analitică*, îndreptată spre infinit, trebuie căutată soluția în problema cuadraturii cercului. Pe această cale se încumetase și tînărul Gottfried Leibniz atunci cînd a prezentat profesorului său Christian Huygens seria infinită de fracții, considerînd că astfel „a reușit să transforme problema triangulării cercului din geometrie în aritmetica infiniților". Numai că maestrul lui, deși puternic captivat de problemă, avea un spirit mai mult de geometru decît de analist și, probabil din această cauză, nu a sesizat importanța descoperirii. Dealtfel, operațiile cu serii erau atunci la începutul lor (149) și că începutul era foarte firav se poate deduce și din faptul că Leibniz a publicat seria găsită de el abia în anul 1682, în *Acta eruditorum*, revistă pe care el însuși o edita. Deși, în 1670, James Gregory stabilise seria prin care se exprima arctg x în funcție de arcul x :

Euler salvat de foc

$$\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

el nu a remarcat că prin această serie s-ar fi putut exprima și numărul π. Peste vreo trei ani, atunci cînd Leibniz a descoperit seria sa

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

pornind de la alte considerații decît Gregory, s-a putut face această legătură, observîndu-se că aceasta era un caz particular al seriei lui Gregory, pentru $x = 1$, căci arctg $1 = \frac{\pi}{4}$. Cercetărilor lui Gregory în privința seriilor, deși extraordinar de interesante, — el este acela ce a introdus și noțiunea de *serie convergentă* —, nu li s-au dat atunci atenția cuvenită, din cauza controversei dintre el și Huygens tocmai pe tema cuadraturii ! La începutul secolului al XVIII-lea, seria lui Leibniz a fost redescoperită de *T. F. Lagny* (150). El a arătat că această serie nu este avantajoasă pentru calcularea zecimalelor numărului π, deoarece pentru a ajunge numai la primele 4 zecimale

Isaac Newton

sînt necesare trei sute de operaţii (151). Dar, cu mult înainte de Lagny, seriile prin care se putea exprima numărul π începuseră să atragă atenţia matematicienilor şi a calculatorilor, văzîndu-se în ele un mijloc, relativ mai uşor decît acelea cunoscute înainte, de a ajunge la un număr mare de zecimale. Astfel, pornind de la seria descoperită de Newton (152) pentru *funcţia arcsin x*:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots$$

rezultă, prin înlocuirea lui x cu $\frac{1}{2}$, o nouă dezvoltare a numărului π într-o serie numerică infinită [1]:

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{3}{2^7 \cdot 5} + \frac{5}{2^{10} \cdot 7} + \cdots$$

Din seria de mai sus s-au putut calcula uşor primele 14 zecimale ale numărului π. Acesta a fost doar începutul. Reluînd formula lui Gregory şi atribuind arcului x valoarea

[1] Pentru $x = \frac{1}{2}$ avem $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, deci $\frac{\pi}{6} = \text{arc sin } \frac{1}{2}$.

$x = \sqrt{\frac{1}{3}}$[1], *A.* Sharp (153) a stabilit altă dezvoltare în serie a numărului π:

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \ldots\right)$$

Seria aceasta, mult mai repede convergentă decît precedenta, i-a permis lui Sharp să stabilească primele 72 de zecimale exacte ale lui π. *O adevărată beţie de cifre*, vei spune, poate, cititorule căci, în practică, ele nu vor putea fi niciodată folosite dacă ţinem seama că pentru a calcula lungimea unui cerc cu o rază cît distanţa de la Pămînt la cea mai depărtată nebuloasă şi cu o eroare mai mică de 1 mm, ajung numai 40 de zecimale ! Ai dreptate, dar ele nu erau calculate pentru un asemenea scop practic, ci aşa cum ţi-am spus, într-un scop teoretic ! Se urmărea *periodicitatea* zecimalelor lui π şi, pentru o eventuală descoperire a ei, chiar cele 72 de zecimale erau prea puţin ! Aproape în acelaşi timp, astronomul John Machin (154) a calculat 100 de zecimale ale numărului π iar după aceea, T.F. Lagny a obţinut 127 zecimale (155). S-ar fi putut, oare, ca Leonard Euler să nu dea şi el atenţia cuvenită acestor *invitaţii la calcul* care emanau de la serii? Nu, aceasta nu s-ar fi putut ! El a reluat metoda lui Machin pentru a stabili alte serii şi mai repede convergente (156). Prin ele, el a verificat mai întîi zecimalele stabilite de Lagny, — *într-un timp record de 80 ore* — şi a descoperit o greşeală la cifra a 113-a, anume ea trebuia să fie 8 şi nu 7 cît o găsise primul calculator ! Dacă ai vrea să-ţi faci o idee de ce însemna pentru Euler acest *timp record*, hai să presupunem că el calcula *fără întrerupere* cîte 8 ore pe zi. Rezultă că a folosit 10 zile ca să calculeze cele 128 de zecimale ale numărului π. Admiţînd că el calcula mai repede decît un calculator obişnuit, adică socotind munca lui dintr-o oră echivalentă cu aceea efectuată în 3 ore de un altul, *timpul record* se poate considera de *o lună*, aşadar un progres colosal faţă de calculatorii din secolele XVI şi XVII care au cheltuit *ani întregi* de muncă numai pentru o treime din numărul de zecimale stabilit acum. Euler a atins acest

---

[1] Analog, $\sqrt{\frac{1}{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ deci $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{6}$.

rezultat în 1779. Peste 10 ani, C.F. Vega a mers pînă la a 143-a zecimală, folosind altă serie descoperită de el (157) dar ulterior s-a arătat că nu-l depășise pe Lagny fiindcă de la cifra 126 înainte, calculele erau greșite. Interesul pentru aceste calcule a continuat și în secolul al XIX-lea. Despre acestea îți voi vorbi mai departe, căci nu a venit vremea să ne despărțim de *secolul luminilor*. Iată cum rezumă d'Alembert, unul dintre cei mai de seamă matematicieni din veacul al XVIII-lea, în *Dicționarul enciclopedic* apărut la Paris în 1789 (158), concluziile la care ajunsese Academia de științe din Paris în privința *cuadraturii cercului*: „Cuadratura figurilor rectilinii este de resortul geometriei elementare și înseamnă să se găsească aria lor transformată într-un dreptunghi. Căci este ușor să obții apoi un pătrat egal cu un dreptunghi dat, fiindcă pentru aceasta trebuie găsită media proporțională dintre cele două laturi ale dreptunghiului. Cuadratura curbelor, adică mijlocul de a măsura suprafața închisă de ele sau de a găsi o suprafață dreptunghiulară egală cu acea suprafață mărginită de linii curbe, este un mod de speculație mai profund și face parte din geometria sublimă (159) ... Cuadratura cercului înseamnă găsirea unui pătrat de arie egală cu a unui cerc dat. Această problemă a preocupat zadarnic pe matematicienii din toate veacurile. Ea se reduce la determinarea raportului dintre lungimea și diametrul cercului, ceea ce nu s-a putut face pînă acum cu precizie. Dacă acest raport ar fi cunoscut, am realiza ușor cuadratura cercului, deoarece este demonstrat că aria lui este egală cu a unui triunghi care are ca înălțime raza cercului și ca bază lungimea cercului. Dar, deși cuadratura figurilor curbe și mai ales a cercului a fost obiectul cercetărilor celor mai faimoși matematicieni din antichitate, în acest domeniu nu s-a realizat nimic important decît abia în jumătatea secolului trecut, cînd s-a găsit mijlocul de a demonstra geometric egalitatea cîtorva spații curbilinii cu a unor spații rectilinii. Problema cuadraturii cercului constă deci în alternativa de a găsi această cuadratură sau de a arăta că ea este imposibilă. Cei mai mulți dintre geometri nu înțeleg decît prima parte a acestei alternative, totuși, a doua corespunde perfect problemei ...

Cuadratura cercului este insolubilă în sensul că soluția problemei nu este exactă, ci aproximativă, cu toate că aproximația poate merge oricît de departe... Dar cuadra-

turiștii nu țin seama de acest fapt și vor să-i exprime exact lungimea. Ca această lungime să fie măsurată exact, ea ar trebui exprimată printr-un segment geometric, folosind ceea ce se cunoaște din natura curbei, adică din proprietățile ei geometrice. Or, în această privință, dincolo de un anumit punct, care nici nu-i prea depărtat, luminile noastre ne părăsesc și orbecăim prin beznă".

Ți-am reprodus o mare parte din acest articol, apărut în *Dicționarul enciclopedic*, pentru ca în felul acesta să-ți fac cunoștință cu d'Alembert și să-i prețuiești claritatea și eleganța lui de stil. Și am mai vrut să-ți fac o plăcere ! Ai băgat de seamă, cred, că în privința informațiilor din domeniul istoriei matematicienilor, tu știi mai multe decît el ! Tu ai auzit despre cercetările făcute de Hipocrate și al-Haisam cu privire la *lunule* pe cînd d'Alembert le credea rezultate ale secolului al XVII-lea ! Da, fiindcă, după cum te-am avertizat, investigațiile mai serioase asupra istoriei matematicilor au început abia spre sfîrșitul veacului trecut. Și acum, dacă ne întoarcem la cele ce scria d'Alembert, vei înțelege că în privința cuadraturii cercului, cuadraturiștii aveau încă tot dreptul să-și continue *nestingheriți misiunea* pe care se credeau însărcinați să o ducă pînă la capăt ! Ca să-și valorifice dreptul *la prioritatea* la care rîvneau, acum aveau la îndemînă academiile, — de exemplu, Academia de științe din Paris —, ei îi trimiteau memorii peste memorii cuprinzînd fel de fel de erori. La început, cînd numărul lor nu era așa de mare ca să devină un balast și să stinghereaască activitatea academicienilor, aceste memorii erau un prilej de divertisment ... Dar, ce haz are să-ți povestesc eu despre aceste lucruri tocmai acum, cînd *enciclopediștii se amuză !*

XII

ENCICLOPEDIȘTII SE AMUZĂ

„Am închis ușile ca să nu intre greșeala. Atunci adevărul m-a întrebat: pe unde voi intra eu?"

Rabindranath Tagore

Sfîrșit de aprilie, 1775, Paris ... În salonul literar al domnișoarei Lespinasse, unul dintre cele mai frecventate pe atunci de oameni de știință, luminile erau aprinse și gazda își aștepta prietenii fredonînd un cîntec la modă. D'Alembert a intrat cel dintîi (160). Era și cel mai aproape, căci n-avea decît să coboare scara care lega camerele de la etaj cu salonul. Privind-o, o tihnă caldă i-a cuprins sufletul, o iubea prea mult ca să nu se bucure văzîndu-i buna dispoziție care, în ultima vreme, o cuprindea foarte rar. Nu-l părăsea senzația că viața pîlpîie în ea ca flacăra unei candele, cu mucul aproape ars, în care lumina mai zvîcnește de cîteva ori înainte de a se stinge (161). Îndată după el, a fost anunțat și academicianul Condorcet. Înalt și bine legat, cu capul mare și cu o anumită stîngăcie în mișcări, care îi dădea un aer copilăresc, el s-a îndreptat vesel înspre amîndoi, arătîndu-le dragostea ce le-o păstra (162). Apoi au sosit și ceilalți: enciclopedistul Diderot, abatele Morellet, contele Chatellux și contele Guibert, toți bucuroși de ceasurile pe care aveau să le petreacă împreună.

— Cum stați cu navigația interioară, marchize de Condorcet? a întrebat Guibert. Am auzit că vi s-au propus atîtea planuri, încît ați putea transforma Parisul și întreaga Franță!

— Da! Sînt așa de multe că nu le-am mai putut cerceta singur. De aceea, domnul ministru de Turgot a format o comisie, din care face parte și domnul D'Alembert. Dar nici așa nu cred că le vom isprăvi de cercetat prea curînd!

— Apar planuri noi, ca ciupercile după ploaie, a adăugat d'Alembert. Se fac cele mai fantastice propuneri prin care

se leagă pîraiele, rîurile și fluviile. De te-ai potrivi lor, întreaga Franță s-ar transforma, peste noapte, în mii și mii de canale, întretăindu-se între ele ...

— Ca un fantastic joc de linii, a întrerupt, plină de vervă, domnișoara Lespinasse. Dacă Leonardo da Vinci sau altul ar fi reușit să construiască o mașină de zburat, cît de frumos s-ar vedea apa alergînd harnică și grăbită, din canal în canal, desenîndu-și linia lucioasă pe verdele cîmpiei ... Parcă-i aud și susurul ...

— Poate că ar fi așa, dacă *imaginația dumneavoastră* ar obliga apele să curgă prin acele canale ! Căci noi, cei supuși tiranici raționamentului și migalei calculului, am stabilit că prin cele mai multe dintre canalele proiectate nu ar curge pic de apă, în afară doar de sudoarea săpătorilor, a replicat rîzînd Condorcet.

— E adevărat, marchize de Condorcet, că l-ați sfătuit pe domnul de Turgot să nu se încreadă decît în oamenii care, chiar dacă ar fi să lege Loire de Fluviul Galben nu s-ar făli cu aceasta și nici nu ar crede că le-ar trebui numai zel și cîteva cunoștințe? a întrebat Morellet (loc. cit. nr. 162, p. 155).

— Era și necesar să o facă, a replicat cu mînie d'Alembert, fiindcă cele mai multe dintre proiectele pe care le examinăm sînt doar rodul vanității, ele nu se bazează nici pe cunoașterea realității și nici pe a tehnicii științifice. Am pierdut o mulțime de vreme cu lăudăroșenia lor nejustificată, cu bîiguielile lor pline de înfumurare (loc. cit. nr. 160, p. 188).

— Or fi din neamul cuadraturiștilor, a zeflemisit Diderot.

— Bine-zis, domnule Diderot ! Și ar trebui să-i numim *cuadraturiștii domnului de Turgot*, ca să-i deosebim de *cei veritabili*, s-a grăbit să spună Condorcet, privind cu înțeles înspre d'Alembert.

— Fără să o știți, ați pus degetul pe rană, a aplaudat rîzînd din inimă d'Alembert. Prietenul Condorcet, în calitatea sa de secretar al Academiei, a fost *tocmai acum* însărcinat să facă *un raport asupra cuadraturiștilor* și de aceea s-a și simțit obligat să facă această diferențiere !

— În sfîrșit, se va discuta și la Academia de științe *o problemă celebră*, a observat, cu o anumită sfidare, Guibert.

Jean le Rond d'Alembert

— Vă înșelați, domnule conte, a răspuns pe același ton d'Alembert. O facem numai ca să putem pune stavilă cuadraturiștilor.

— Să puneți stavilă? s-a mirat Guibert. Ce vreți să înțelegeți prin aceasta?

— Că ne-am săturat de toate memoriile idioate ale cuadraturiștilor, că ele ne dau atîta bătaie de cap de parcă n-am avea destulă chiar și fără de ele! Trebuie să știți că nu numai odată, aceste hărțuieli ne-au împiedicat, pe domnul Condorcet și pe mine, de la orice studiu serios (loc. cit. nr. 162, p. 115)!

— Vă cer iertare, domnule d'Alembert, că îndrăznesc să pun la îndoială afirmația dumneavoastră. Dar mă mir că *puteți ghici*, fără a fi citit o lucrare, că ea *nu conține* adevărata cuadratură a cercului, a replicat Chatellux.

— Am să încerc să vă lămuresc eu, domnule conte, a intervenit grăbit Condorcet. Pe baza experienței făcute la Academie, citind sutele de memorii despre cuadratură depuse de peste 70 de ani, s-a constatat că nici unul dintre acei ce au trimis soluția problemei, nu cunoștea *nici natura* și *nici greutățile* acestei probleme. Ei nu știau că nici una dintre metodele ce le foloseau nu i-ar fi putut

Caritas de Condorcet

conduce la soluție, chiar dacă ea ar fi existat. Mă veți întreba, de ce au atacat-o? Cei mai mulți, pentru că există un zvon public care pretinde că guvernele au promis recompense considerabile acelora care vor rezolva problema cuadraturii cercului. Pe baza acestui zvon, foarte mulți renunță la ocupațiile lor serioase ca să se consacre acestei probleme, iar alții se ocupă de ea din cauza gloriei pe care visează să o cîștige și pe care sînt convinși că au și cucerit-o (163). Am reușit oare să vă lămuresc?

— Nu, marchize, fiindcă aceste două categorii despre care mi-ați vorbit, cuprind numai pe nespecialiști. Dar nu pot crede că nici un matematician încercat nu s-a ocupat de această problemă și, ca atare, dacă el ar fi fost tentat să-și trimită memoriul Academiei, iată că ar rămîne necitit, chiar dacă ar cuprinde idei extrem de interesante!

— Curioasă problemă și cuadratura cercului. Unde mă întorc nu aud vorbindu-se decît despre aceasta și totuși, vă mărturisesc sincer că nu știu prea multe despre ea, a adăugat Guibert. De aceea, v-aș face o propunere bazată pe fericita întîmplare de a avea printre noi trei enciclopediști, doi dintre ei corifeii matematicilor iar domnul Diderot, un bun cunoscător al lor (164). Ce-ar fi dacă

Julie de Lespinasse

i-am ruga să ne vorbească despre această faimoasă problemă, care fascinează pe atîţia muritori ?

— În calitatea mea de gazdă, aprob cu entuziasm propunerea contelui Guibert şi nu văd pe cineva care s-ar opune !

— Chiar dacă am fi tentaţi să ne opunem, prin hotărîrea dumneavoastră sorţii s-au aruncat, a aprobat cu un zîmbet deschis Diderot.

— Atunci nu ne rămîne decît să dăm cuvîntul domnului d'Alembert ca să ne facă *elogiul cuadraturii cercului*, a rostit gazda, cu aceeaşi voioşie în glas.

— Mă simt obligat să atrag atenţia onoratei asistenţe, că elogiile intră în atribuţiile domnului de Condorcet, a spus-o ridicîndu-se solemn în picioare d'Alembert. Domnia sa le alcătuieşte cu atîta măiestrie, încît l-a încîntat chiar şi pe domnul Voltaire, care l-a numit *mai mult decît Fontenelle* (165), bineştiut fiind de fiecare, cît de apreciate erau elogiile lui Fontenelle. Apoi, în locul *elogiului cuadraturii cercului*, eu aş propune pe acela *al cuadraturiştilor*. Povestindu-ni-se aici cîteva dintre aventurile acelora ahtiaţi să cucerească cetăţile ştiinţei, fără de pregătirea necesară, seara aceasta va avea un farmec deosebit. Or,

acest subiect îl cunoaște foarte îndeaproape tot numai domnul secretar al Academiei, căci domnia-sa și-a înarmat *fantastica sa memorie* cu tot felul de arme, făurite chiar din memoriile ce le-a cercetat, ca să fie în stare să țină piept, în lupta ce se va încinge foarte curînd.

— Nu mă opun de loc, a răspuns Condorcet. Cer numai îngăduința să sorb mai întîi pe îndelete această admirabilă cafea, pregătită de gazda noastră după o metodă mai bună chiar decît a suveranului nostru (166).

În acest timp domnișoara de Lespinasse, luîndu-și rolul în serios, a pus o măsuță în mijlocul salonului, pe ea un pahar de apă și alături un fotoliu. După aceea a anunțat, cu gravitatea unui președinte :

— Domnul marchiz de Condorcet are cuvîntul. Domnia-sa ne va face elogiul cuadraturiștilor remarcabili în istoria problemei cuadraturii cercului !

Condorcet s-a ridicat și a pornit spre locul rezervat lui. A salutat și, îndepărtîndu-și privirile dincolo de cei prezenți, ca și cum ar fi văzut ceva aievea, a început cu o voce caldă și însuflețită :

— Onorată asistență, îmi voi permite să vă însoțesc prin această galerie celebră, în care se păstrează portretele cuadraturiștilor de seamă din veacurile trecute și de acum. Colecția fiind atît de bogată, ne-ar trebui prea multă vreme dacă ar fi să ne oprim la fiecare tablou în parte ca să-i ascultăm povestea. De aceea, vă propun să le priviți în treacăt și să nu ne oprim decît în fața acelor portrete care vă vor atrage atenția în chip deosebit. De pildă, văd că acum, prietenul nostru, domnul abate Morellet, privește cu multă insistență înspre ochii senini și visători ai cardinalului de Cusa. Sîntem prin 1450. El era fiul unui pescar modest din satul Cues, de partea stîngă a Mosellei, care ar fi rămas necunoscut dacă nu s-ar fi născut el acolo. Dorea să înțeleagă tot ce-l înconjura și mereu întreba, de ce-i așa? Ceea ce copii învățau la școală de frica învățătorului, lui îi dădea fiori de fericire. A audiat cursurile vestitelor universități din Heidelberg și Padova și a simțit o dragoste pătimașă pentru astronomie și geometrie. Astronomia a adorat-o într-atît, încît nu a ezitat să scrie o broșură în care afirma, contrar canoanelor bisericești, că Soarele și nu Pămîntul se află în centrul Universului. După cum știți, acest adevăr s-a afirmat abia peste 80 de ani, așa că putem să-l considerăm pe Cusa ca un precursor al lui Coper-

Blaise Pascal

nic. Tot cu atîta putere a iubit geometria, iar cuadratura cercului l-a atras așa cum îl atrăgeau în copilărie valurile apei. Dacă atunci stătea ceasuri întregi nedesiipit de mal ca să le privească jocul capricios, acum se concentra zile și nopți de-a rîndul ca să stabilească o metodă prin care să se apropie cît mai mult de aria cercului (167). De un an, de cînd devenise cardinal, avea la dispoziția lui tot timpul ca să se poată ocupa de toate problemele științifice și ale filozofiei ce se puneau atunci. A propus *o reformă a calendarului, a întocmit o hartă a Europei* dar, totodată, cerceta și cerceta mereu problema cuadraturii cercului. Citise operele lui Arhimede, care fuseseră de curînd traduse în latinește, cunoștea bine pe Euclid, pe Aristotel și, bazîndu-se pe un principiu stabilit de el, *coincidența opozițiilor*, el a dedus o formulă care dădea o aproximație foarte bună a lungimii arcului de cerc. Această afirmație a lui nu a fost însă înțeleasă cum trebuie și i s-a atribuit faptul că el a pretins că a stabilit chiar cuadratura, așa că după moartea sa, lucrarea scrisă de el cu titlul *Cuadratura cerului* a fost aspru criticată (168). Mai tîrziu însă, marii geometri, cum a fost Christian Huygens, l-au admirat. Metoda pe care a imaginat-o el ca să măsoare lungimea cercului era foarte

ingenioasă căci el căuta segmentul pe care presupunea că s-ar rostogoli cercul fără alunecare. Cu alte cuvinte, el a ajuns la definiția uneia dintre cele mai însemnate curbe, care va fi cercetată de matematicienii de mai tîrziu ...

— Vă referiți oare la cicloidă? a întrebat cu interes Chatellux. Fiind vorba despre rostogolirea cercului, îmi amintesc că și Huygens a folosit acestă curbă în lucrarea sa despre orologiu.

— Întocmai, domnule conte, și vă felicit că ați citit cartea aceasta.

— Nu cumva, matematicienii îi zic acestei curbe *Elena geometriei*? a insistat Diderot.

— Elena? s-a mirat Guibert, oprindu-și privirile asupra părului răvășit al lui Diderot, el fiind singurul care nu purta perucă. Ar putea provoca, *o simplă curbă*, patimile și luptele de care a fost în stare frumoasa Elena?

— Și încă ce lupte aprige, a răspuns batjocoritor d'Alembert.

— Ba față de marele Pascal ea a fost duioasă și blîndă, a adăugat repede domnișoara Lespinasse, încercînd să modereze ostilitatea din tonul prietenului ei.

— Așa? Atunci, dacă nu se supără marchizul de Condorcet de întrerupere, aș fi foarte curios să cunosc cum s-a manifestat *duioșia Elenei* dumneavoastră, prea scumpă domnișoară Lespinasse, a vorbit din nou Guibert.

— Din contra, mi-ar face și mie plăcere să o ascult.

— Bine, am să vă povestesc, deși amănuntele le cunosc de la domnul d'Alembert: Faptele s-au petrecut după convertirea lui Pascal, pe cînd locuia la Port-Royal. Suferea de insomnie, de dureri de dinți și de stomac, iar într-o noapte, pe cînd durerile de dinți păreau să întreacă orice limită, gîndurile lui s-au oprit la cicloidă. A desenat-o și a început să-și amintească proprietățile ei. Apoi, pe nesimțite, aceste proprietăți au adus cu ele alte proprietăți necunoscute încă, iar el le stabilea cu încîntare, uitînd de durere și de tot ce-l înconjura. Cînd soarele i-a bătut în geam, Blaise Pascal era atît de fericit și avea atîta energie în el încît a petrecut 8 zile și 8 nopți încheiate lîngă cicloidă, rezolvînd toate problemele ce i-au trecut prin minte în noaptea aceea fermecată.

— Ce ți-e și cu matematicienii aceștia, domnule Guibert, a aruncat săgeata Diderot.

— Acesta însă a fost cîntecul lebedei, a continuat trist domnișoara Lespinasse, fără să ia aminte la întrerupere. Pascal și-a publicat toate rezultatele obținute atunci, sub pseudonimul Amos Dettonville.

— De ce încercați să învăluiți această ultimă aventură matematică a lui Pascal în sentimentalism cînd, de fapt, ea a avut un caracter provocator? i s-a adresat d'Alembert, sarcastic.

— Cred că prietenul nostru are dreptate, a intervenit Condorcet. Această ultimă scriere matematică a lui Pascal, a fost adresată, ca provocare, atît matematicienilor francezi cît și celor englezi.

— Atunci, de aici au început luptele pentru Elena dumneavoastră? a întrebat iar Guibert.

— A, nu! ele fuseseră începute de mai înainte, a răspuns Condorcet.

— Dar mai lăsați-o în pace pe Elena dumneavoastră, a intervenit Morellet. Eu sînt curios să știu, ce a mai făcut cardinalul meu?

— După cum vă spuneam, a reluat Condorcet, cardinalul de Cusa s-a străduit să găsească o formulă care să exprime lungimea segmentului de dreaptă pe care s-ar

rostogoli un cerc fără alunecare și convins că a stabilit-o, a murit fericit. De aceea și figura lui este atît de senină !

— Atunci să nu-i mai tulburăm liniștea, a spus Diderot și continuînd jocul început s-a adresat lui Condorcet : Aproape de portretul lui Cusa îmi pare că se află acela al lui Leonardo da Vinci, nu-i așa?

— Desigur, a răspuns foarte serios Condorcet. Sîntem tot în veacul al XV-lea, îndată după moartea cardinalului. Leonardo da Vinci, artist genial și totodată un profund gînditor, a fost atras și el de cuadratura cercului. A citit și el lucrările lui Arhimede în legătură cu măsura cercului, fiindcă le găsise printre niște manuscrise atunci achiziționate, iar în notele rămase de la el se găsesc cîteva observații care, dacă memoria nu mă înșeală, sînt formulate cam în felul următor : „Cuadratura cercului este bine spus, dar rău formulat. *Este bine spus*, căci Arhimede arată că aria cercului este egală cu un triunghi dreptunghic făcut din linia cercului și a semidiametrului lui, dar *este formulată rău* căci el stabilește cuadratura unui poligon cu 96 de laturi, din care lipsesc cele 96 de segmente tăiate din cerc de cele 96 de laturi. Aceasta nu se poate numi, în nici un caz, cuadratura cercului, dar nu-i mai puțin adevărat că-i imposibil să o faci altfel (169)". Iată părerile lui Leonardo despre cuadratură, dar să nu vă închipuiți că părerile lui sau ale altora care priveau astfel problema, au avut vreo greutate și au oprit avîntul cuadraturiștilor ! Numeroasele portrete, ce urmează înșirate unele după altele, vă arată că nu. Dar îmi se pare că iar surprind privirea dumneavoastră, venerate prietene Morellet, îndreptată înspre un alt prelat? Vreți să știți cine este ? Dumnealui este filozoful Charles de Bovelle. A fost, pe la 1 500, și profesor de matematici în Noyon. Cum de a ajuns cuadraturist? Se pare că dintr-o simplă întîmplare. Să fi fost de vină o după amiază caldă de primăvară, cînd a trecut prin fața filozofului o trăsură în care erau doi îndrăgostiți, la vederea cărora el a plecat imediat ochii în jos? Nu se știe precis, el mărturisește doar că „ideea cuadraturii i-a venit privind o roată ce se învîrtea pe pavaj". Și cum, de la roată și pînă la cuadratură nu era decît un pas, el l-a făcut și gata ! De atunci nu a mai citit altceva și nu a mai vorbit cu nimeni altceva decît despre *cuadratura cercului*. Și cu cine nu a vorbit ! Chiar și cu un biet țăran, care a devenit și el un cuadraturist înfocat. Și, fiind o fire generoasă și cinstită, Charles

Bovelle a publicat descoprerirea țăranului-cuadraturist, alături de a lui în paginile unuia dintre acele 6 volume ale cărții tipărită de el în 1507, cu titlul : *Geometricae introductiones, libri VI* (170). Iată dar că în aceeași lucrare apar, dintr-o dată, doi pretendenți la descoperirea cuadraturii cercului, fiecare cu părerile și, bineînțeles, cu erorile personale ! Dar să nu vă închipuiți că întreaga lucrare a acestui teolog și filozof ar fi de aruncat, din această cauză ! Nu, ea a avut merite mari și ca dovadă este faptul că a apărut reeditată în mai multe ediții, atît în limba franceză cît și în latinește. În ea se află un studiu documentat asupra poligoanelor regulate și asupra poligoanelor stelate și, de asemenea, asupra cicloidei, curbă care atunci nu avea acest nume.

— Atunci cum se numea? a vrut să afle domnișoara Lespinasse.

— Nici într-un fel, i-a răspuns, dintr-o dată îmblînzit, d'Alembert. Abia Galileo Galilei a numit-o *cicloidă* și nu toți au fost de acord cu această numire. De pildă, matematicianul nostru, Gilles de Roberval, o numea *trohoidă*.

— Așadar, respecta mai mult originea despre care vorbea Bovelle, ținînd seama că *trohos* înseamnă *roată*, a observat Chatellux.

— Văd că privirea dumneavoastră stă neclintită asupra acestuilalt distins personaj, dragul meu prieten, a reluat Condorcet povestirea, adresîndu-se lui d'Alembert, cu o ironie abia stăpînită. V-a atras oare pasiunea ce o punea el ca să-i învețe matematicile pe cei nepricepuți? Colegul nostru Diderot ar fi foarte mirat să fie așa fiindcă de la el dețin următoarea întîmplare : Un tînăr plin de calități, și pe deasupra un entuziast admirator al lucrărilor prietenului d'Alembert, ajungînd la un moment dat în fața unor dificultăți pe care nu le putea înlătura, din calculul diferențial, s-a dus să-l întrebe pe maestrul lui venerat. La care domnia sa a binevoit să răspundă doar atît : „Citește mai departe și încredințarea va veni".

Toată asistența a rîs și printre ei mai tare rîdea chiar cel vizat. Abia cînd rîsul s-a potolit Condorcet a continuat, privindu-l din nou pe d'Alembert :

— Portretul îl reprezintă pe Orontius Fineus, fost și el profesor de matematici la Institutul transformat azi în College de France. Dar sînt și alte pricini care merită să atragă atenția asupra lui. De pildă, în tinerețe s-a opus

Coperta cărții
lui
Charles de Bovelle,
Ed. 1500,
Paris

Concordatului dintre Franța și Vatican, ceea ce i-a atras numai vreo 6 ani de închisoare ! Poate că acolo să fi căutat tovărășia cuadraturii cercului, așa cum a mai ținut ca de urît și altora, tot prin asemenea singurătăți. Ca profesor, era așa de apreciat încît i s-a conferit titlul de profesor regal de matematici. În 1530 a publicat cartea *Promathesis* în care se găsesc chestiuni de aritmetică, geometrie, astronomie dar și *cuadratura cercului.* El a tradus și lucrarea lui Bovelle din latinește (171) în limba franceză și peste doi ani a publicat o broșură intitulată *De quadratura circuli* (172). Pînă atunci nimeni nu avea nimic cu el, dar cînd a apărut această broșură, atacurile contra ei au izbucnit ca o canonadă ! Semnalul l-a dat celebrul profesor de la Universitatea din Coimbra, Pedro Nonius (173) tipărind, în 1546, cartea cu titlul : *De erroris Orontii Finei.* În 1553 l-a combătut Joannes Buteo, fostul lui elev de la Colegiul regal (174) și apoi o mulțime alții. Dar Fineus nu a reacționat deloc. Cuadratura ridicase în jurul lui baricade așa de puternice că nici în fața morții nu a cedat. Cînd și-a simțit sfîrșitul aproape, l-a rugat pe cel mai bun prieten al lui să publice el descoperirile pe care le mai făcuse în legătură cu *cuadratura* și cu alte probleme. Așa că, la un

O pagină
din carten
lui Orantius Fincus

an după moartea lui, au apărut patru volume intitulate *De rebus mathematicis hactenus desideratis*, însoțite de o biografie a autorului. Credeți că poate atacurile lui Nonius sau Buteo au avut vreun efect asupra altor cuadraturiști, din preajma lui, sfătuindu-i să se lepede de ea? Se pare că nu, căci, peste 40 de ani, se înalță falnic, din același Institut, alt cuadraturist. Iată-l în portretul de alături. Însă, mi se pare că pe dumneavoastră, conte de Chatellux, vă interesează mai mult grupul din stînga, în frumoasele costume olandeze? Merită cu adevărat atenția dumneavoastră, căci în realitate primul dintre ei este francez autentic. Acesta este Simon a Queçu sau Simon van der Eycke dar numele lui adevărat este Simon du Chesne. A fugit în Olanda din cauza persecuțiilor calviniștilor. Era inginer și își îneca dorul după locurile lui natale în cuadratura cercului. În 1584 a scris cărticica *Quadrature du cercle ou manière de trouver un carré égal au cercle donné et au contraire*, în care el dovedea că raportul dintre lungimea cercului și diametru se exprima *exact* prin fracția $\left(\frac{39}{22}\right)^2$. Or, acest raport are valoarea 3,1425, așadar el rămînea

între limitele cerute de Arhimede, și matematicienilor le-a venit destul de greu să-i dovedească greșeala.

— Nu vă înțeleg de loc, domnule Condorcet, a sărit în picioare Guibert. Cum vine aceasta? Adică, de ce *trebuia* ca acest raport să fie numaidecît fals? De unde știau matematicienii așa ceva?

— Pentru că au ei un simț special, *cel de-al șaselea simț*, nu a pierdut ocazia să-l persifleze d'Alembert.

— Nu vă potriviți, a reluat Condorcet, împăciuitor. Totul este destul de simplu fiindcă era destul de evidentă greșeala din construcția pe care o indica el (175). Știți bine că în matematici nu este nimeni crezut pe cuvîntul lui de onoare, exceptînd cazul pe care-l cunoaștem cu toții (176). Iar demonstrația pecare o dădea el, nu rezista raționamentului. Abia peste un an, matematicianul olandez *Adrian Antoniz* a opus valorii stabilite de Simon du Chesne, raportul mai precis, obținut prin folosirea metodei lui Arhimede, anume $\frac{355}{113}$ care furnizează 6 zecimale exacte ale raportului despre care vorbim. Acest rezultat a fost recunoscut de Simon al nostru dar nu l-a descumpănit de fel. El a modificat metoda, a refăcut toate calculele și a publicat o nouă ediție a lucrării sale, în care valoarea raportului dintre lungimea cercului și diametrul său este dată de formula $\sqrt{\sqrt{300} - 8}$, care rezista valorii dată de Antoniz.

— Extraordinar ! Minunat ! a sărit iar de la locul lui Guibert, în culmea fericirii, ca și cum această victorie îl răzbuna pe el, în fața lui d'Alembert, cu care avea el o anumită răfuială, din cauza domnișoarei Lespinasse.

— Nu vă bucurați prea degrabă, domnule conte, l-a amenințat din nou, privindu-l cu un zîmbet sarcastic, d'Alembert. Știți că matematicienii sînt cam tenace și încăpățînați ! Cînd și-au pus ceva în minte, nu se lasă bătuți așa de ușor. Un alt olandez, de data aceasta nici măcar un mare matematician, ci numai un strașnic și neîntrecut calculator, i-a pus în față nu 6, ci 20 de zecimale exacte ale acestui raport, zecimale pe care le-a calculat anume în acest scop, timp de cîțiva ani ...

— Vreți să glumiți, domnule d'Alembert, nu-i așa? l-a întrebat Guibert, cu politețe.

— Prietenul nostru nu a glumit, domnule Guibert, decît numai că, în loc să vă arate cifra exactă de zecimale, a spus una mai mică. Ludolph van Ceulen, căci despre

el este vorba, a calculat 35 de zecimale exacte, a spus Condorcet, plin de zîmbet și voie bună. Figura lui este foarte interesantă și de aceea am să vă povestesc cîte ceva despre el. Era dintr-o familie săracă și nu avusese posibilitatea să învețe nici latina, nici greaca și cu atît mai puțin matematicile. Dar avea un talent deosebit pentru calcule, era, cum spunem noi, *un calculator înnăscut*. Fiind și agil în mișcări, s-a făcut profesor de scrimă și de gimnastică și își exercita meseria în diferite orașe ale Olandei: Breda, Amsterdam, Delft, Leiden ș. a. În sala lui de gimnastică veneau mulți negustori bogați, iar în timpul pauzelor el căuta să-și distreze elevii rezolvînd cu ușurință orice problemă de aritmetică pe care negustorii olandezi i-o propuneau. Tot de la acești negustori olandezi a auzit, întîia oară, și despre cuadratura cercului, rezolvată de van Eycke și problema l-a interesat. S-a mai întîmplat că primarul din Delft, pe nume Grozio, era și el un cuadraturist pasionat și, din această cauză, tradusese în limba olandeză cartea lui Arhimede *Despre măsura cercului*. Acesta l-a și îndemnat pe Ludolph să o citească și să folosească metoda lui Arhimede ca să verifice cuadratura lui van Eycke. Zis și făcut, numai că în pasiunea lui pentru calcule el nu s-a mărginit la poligonul cu 96 de laturi considerat de Arhimede. Nici n-avea ce face cu el căci cu acel poligon se obțineau doar două zecimale exacte ale raportului cercetat. Așa că Ludolph a calculat întîi latura pentagonului înscris în cerc, apoi a pentagonului circumscris cercului și după aceea a început să dubleze numărul de laturi ale poligoanelor, întîi la 10, 20, 40 pînă ce a ajuns la un poligon cu 10 485 760 de laturi și calculînd raportul dintre perimetrul acestui poligon față de diametrul cercului respectiv a ajuns la cele 20 de zecimale exacte despre care a fost vorba. Vă închipuiți ce senzație făceau aceste calcule? Fiecare rezultat parțial era așteptat și comentat iar faima lui Ludolph a devenit așa de mare încît atunci cînd la Leiden s-a înființat o școală de geniu, Ludolph van Ceulen a fost chemat acolo ca profesor de matematici. Credeți că Ludolph s-a mulțumit cu rezultatele ce le obținuse? Nu, el nu se mai putea opri, calculele acestea erau alcoolul care-l îmbăta și de care nu se mai putea lipsi! A repetat procedeul lui Arhimede la un pătrat, de unde a ajuns la un poligon cu 1 073 741 824 de laturi și cînd a terminat și cu acestea a început cu altul, mergînd pînă la

32 512 254 720 de laturi. În 1596 el a publicat la Delft, în limba olandeză, cartea cu titlul *Van der Circkel* unde sînt cuprinse aceste realizări. După moartea lui, s-au găsit și celelalte 15 zecimale, ce nu erau trecute în carte!

— Drept să vă spun, marchize de Condorcet, că sînt cu totul uluit și de două ori, mai întîi despre relatările dumneavoastră în sine, apoi despre memoria dumneavoastră. Am auzit că aveți o memorie extraordinară dar nu mi-am putut închipui că puteți reține numere care se ridică la zeci de miliarde, a spus cu emoție în glas contele de Chatellux, neuitînd că lui i se adresase Condorcet.

— Curioasă și puternică pasiune, a murmurat, dusă pe gînduri, domnișoara Lespinasse. O înțeleg la dumneavoastră, la domnul d'Alembert, fiindcă, în acest caz, ea se leagă de un fond adînc, de perspective largi, rezultate din studii aprofundate, dar în cazul acestor cuadraturiști, cum ar trebui să-mi explic lucrurile?

— Pasiunile nu se explică și nici nu au o rațiune de a fi, dragă prietenă, ele sînt, *există* sau nu sînt, *nu există* sau *nu mai există*, atîta tot, a răspuns abatele Morellet. Dar ...

— Domnule abate, nu înțeleg de ce încercați să-i sustrageți privirea gazdei noastre de la portretul spre care privește, înfiorată, parcă cu teamă! Nu trebuie să vă temeți de loc, scumpă domnișoară Lespinasse. Dacă-l vedeți așa de furios, are el motive bine întemeiate! În realitate, domnul Joseph de Scaliger era un om vesel și bine educat. Era francez de origine, dar portretul lui se află tot în grupul olandezilor numai fiindcă a fost chemat ca profesor la Academia din Leiden și a rămas acolo. El a fost unul dintre cei mai vestiți filologi de la sfîrșitul veacului al XVI-lea. Ce caută portretul lui aici? Cred că ați bănuit: renumitul filolog, umanistul și medicul padovan, Joseph de Scaliger[1], autorul unor tratate foarte apreciate în lumea oamenilor de litere și a filozofilor, s-a îndrăgostit așa, dintr-o dată, de cuadratura cercului și a uitat de tot ce nu se numea cuadratură, numai și numai ca să fie în preajma ei. În 1592 a tipărit o carte foarte elegant imprimată, cu figurile în cerneală roșie intercalate în text, pe atunci o raritate, avînd ca

[1] În 1560 a tipărit la Genova, *Poetices libri*, una dintre cărțile de bază ale clasicismului francez.

titlu : *Nova cyclometria*. Cartea a apărut, pentru toți cei ce-l cunoșteau și-l apreciau, ca o ... cometă ! S-au grăbit să o citească și ei, și matematicienii, și astfel au aflat că bietul Arhimede s-a cam încurcat în calcule și că numai din această cauză nu a ajuns la cuadratura cercului ! Iată că, datorită lui, corectarea se putea face și astfel, vor putea afla și domnii matematicieni cum se ajunge la adevărata cuadratură a cercului ! Acuma, de ! oamenii de litere nu aveau ei prea multe să-i spună, deși nu le prea venea să creadă că Arhimede ar putea fi doborît așa, pe neașteptate, dar matematicienii ? Ei, săracii, de bună credință, s-au grăbit să-i arate că nu raționamentul lui Arhimede păcătuia, ci al lui. Cine s-a încumetat să o facă? Cei mai mari din vremea lui, oamenii cu renume cel puțin la același nivel : François Viète, Cristof Clavius, Adrian Romanus și chiar Ludolph van Ceulen ! Rezultatul? Parcă ar fi vorbit în deșert ! Scaliger și un grup de admiratori, cuadraturiști ca și el, nu au recunoscut nimic (loc. cit. nr. 163, p. 624) ba, văzînd insistențele matematicienilor de a-i întoarce pe calea cea adevărată s-au supărat foc pe toți matematicienii, le-au adus injurii, și, plini de dispreț, au afirmat că geometrii habar n-au de geometrie !

— M-a bucurat cunoștința lui Scaliger, domnule Condorcet. Cred că s-ar fi simțit foarte bine în tovărășia domnului Hobbes, nu-i așa? Sper că vom vedea undeva pe aproape și portretul lui?

— Da, e aici, iată-l , numai că se află de cealaltă parte a peretelui, fiindcă el este mîndria Angliei și nu a Franței sau a Olandei ! Priviți-i ochii, care par să te sfredelească, nu alta ! E la fel de furios ca și colegul lui dar, deși contemporani, nu s-au cunoscut sau, mai bine zis, nu și-au unit forțele pentru un atac mai puternic căci fiecare își ajungea lui însuși !

— Totuși, domnul d'Alembert și cu mine îl admirăm foarte mult pentru atitudinea lui independentă față de tradiție și de autoritate ! De aceea, aș ruga pe domnul abate Morellet să-l absolve de păcatul cuadraturii, a spus Diderot !

— Dacă se face apel la serviciile domnului abate Morellet, pentru sufletul filozofului Hobbes, atunci intervin și eu — s-a amestecat în discuție Chatellux —, fiindcă am auzit că avea o teamă neexplicabilă de fantome. Nu

putea rămîne singur într-un loc întunecos, de frica lor, deși afirma că nu crede în ele și că atitudinea aceasta e instinctivă, rămasă din copilărie, de cînd asculta povești de acest gen (loc. cit. nr. 140, p. 257) !

— Prea multe nu am eu putere să fac, — a răspuns, prinzîndu-se în joc, abatele —, dar și cu aș pune un cuvînt bun pentru el, fiindcă știa, ca nimeni altul, să aprecieze o conversație bună. „Cînd nu ai posibilitatea să susții o conversație inteligentă, spunea el, atunci înțelegerea și inventivitatea ta se acoperă cu un fel de mușchi, așa cum vezi pe cîte un gard de nuiele învechit“ (177). Știu că odată a refuzat ospitalitatea unui conte care avea o bibliotecă foarte bogată, motivînd că deși contele a adunat multe cărți demne de a fi cumpărate, nu poate accepta invitația, deoarece el consideră ca un mare inconvenient lipsa unei conversații agreabile !

— Văzînd că are atîția admiratori — a adăugat Condorcet — nu mai îndrăznesc să-l bîrfesc. Mă mulțumesc să vă relatez că, la 90 de ani, Hobbes a mai aflat destulă energie ca să adreseze un ultim pamflet matematicienilor ce nu le-au înțeles. Acesta a fost intitulat *Decameron Physiologicum* (178) și în el își varsă iar amarul de a nu-i fi fost înțeleasă cuadratura găsită de el ! Mulți cuadraturiști sînt și ei în apropierea lui, dar nu are rost să ne apropiem de ei, numai ca să le rostim numele fără să le ascultăm și păsurile. Doar ca să facem o excepție, pentru contele de Guibert, care a rămas în extaz în fața acestui frumos și visător spaniol, cu figură de poet. Și chiar era ! Numai că versurile lui nu au fost închinate unei muritoare de rînd, ci *cuadraturii cercului* ! Ea a fost regina visurilor lui și ei i-a dedicat cartea pe care a publicat-o la Anvers, în 1587. Veți găsi în ea, dragul meu conte, un prea *subtil dialog în versuri* între autor, *Cavalerul Jaime Falcon de Montesa, și cerc.* Veți vedea cum știe să-și exprime cercul emoția și recunoștința, dragostea și fericirea pe care o avea pentru acest cavaler ce l-a transformat *din cerc în pătrat* ! E înduioșător să asistați la această conversație dar e și mai periculos să rămîneți numai în societatea lui, de aceea, permiteți-mi să vă prezint pe un alt cuadraturist din neamul lui, tot așa de impetuos, pe Alfons Cane de Molina. În cartea lui, *Nuevos descubrimintos geometricos,* publicată la Amberes în 1598, arată că Euclid ar fi greșit nu mai puțin de 27 de teoreme, bineîn-

țeles pe acelea care îl împiedicau pe Alfons de Molina să stabilească mult rîvnita cuadratură a cercului ! Să nu credeți cumva că această carte nu a avut succes ! Ea a fost tradusă, după mai bine de 20 de ani și în limba latină, ca să aibă astfel și mai mulți cititori !

Dar pe dumneavoastră, conte de Chatellux, văd că nu vă lasă indiferent nici portretul de aici ! Nu mă mir deloc, este al superbului Pietro Antonio Cataldi, profesor la Universitatea din Bologna. Știți de ce zîmbește așa de mulțumit? Pentru că acum, în 1625, ultimul an al vieții lui, a dat la tipar cea de a doua carte în care *ia apărarea geometrilor antici* împotriva acelora care s-au considerat în stare să-i ponegrească ! Desigur că acei geometri, asemeni Soarelui, pot fi umbriți momentan de cîte un nor, dar prin aceasta strălucirea lor nu-i cu nimic știrbită, totuși el s-a considerat dator ... cartea aceasta a lui are un titlu cam lung : *Difesa d'Euclide dovesi dimostra la oppositioni dati dal sig. Juan Alfonso Molino Cano a molte propositioni degli Elementi d'Euclide non essere di valore et si mentiene chiara la certissima doctrina d'essi Elemente.* Cu șase ani înainte, tot el nu l-a cruțat nici pe *Scaliger*, luîndu-i în același mod apărarea lui Arhimede (179).

Și acum, mă văd silit să vă aprob părerea, dragă prietene Diderot, aveți tot dreptul să afirmați, sus și tare, că *și în Danemarca este ceva putred*, chiar dacă nu faceți decît să repetați constatarea altuia ! Portretul din fața dumneavoastră este al bătrînului și ursuzului astronom Christian Severini Longomontanus. Tot cuadratura cercului i-a smuls zîmbetul împăciuitor și atotînțelegător ce s-ar fi potrivit așa de bine pe figura acestui astronom de seamă, elev al lui Tycho Brahé (180), deprins să stea ceasuri întregi numai în tovărășia senină a stelelor ! În ce fel a ajuns sub influența acestei periculoase cuadraturi? nu știu. Cum a putut să-și schimbe sentimentele care-l înfrățeau cu imensitatea cerului în altele care să-l îndepărteze chiar și de prietenul lui cel mai apropiat? Nu se poate explica decît admițînd, cum ați spus mai înainte, cele ce ați spus despre Danemarca ! În 1622, Longomontanus a publicat, spre surpriza tuturor, nu o carte de astronomie, ci o alta purtînd ca titlu : *Cyclometria lunulis reciproci demonstrata*, în care arăta că lungimea cercului de diametru egal cu unitatea, este *egală exact cu 3,15185*, nici mai mult mici mai puțin, ci *exact* atît. Vă închipuiți cîți

matematicieni, care se simțeau măgulițI de a-l considera egalul lor, au căutat să-i atragă atenția că s-a înșelat? Nu veți crede, poate, dar printre ei se numără marele Huygens, renumitul Snellius, celebrul Henri Briggs, cel ce a calculat tocmai atunci tabela de logaritmi zecimali, Guldin, vestit prin descoperirea teoremelor legate de centrul de greutate al corpurilor de rotație, și încă mulți alții ... totul a fost zadarnic, el nu mai auzea și nu mai vorbea aceeași limbă cu cei ce îi fuseseră odinioară asemeni, era altul, era cuadraturist și ultimii 25 de ani din viață i-a petrecut numai alături de calculele de acest gen. În 1644, cu 3 ani înainte de a muri, a publicat a doua carte: *Christiani Severini Longomontani Cimbri Rotundi, in plano seu circuli absoluta mensura*. Această scriere a fost pentru toți matematicienii de atunci o tristă revelație. Longomontanus nu mai aplica aceeași metodă ca în lucrarea trecută adică demonstrațiile geometrice, fie ele și greșite, ci se folosea, ca să-și susțină cuadratura, de pretinsele proprietăți misterioase ale numerelor 7, 8 și 9 (181). Alt matematician, renumit atunci, John Pell, a combătut și această carte, dar totul a fost în zadar. Longomontanus a părăsit această lume supărat și neînțeles!

Cîtă deosebire — îmi atrageți dumneavoastră atenția, domnișoară Lespinasse —, între ochii lui Longomontanus și expresia acelora din portretul la care vă uitați, insistent, acum! Așa-i. Privirea aceasta melancolică vorbește despre un paradis pierdut. Richard White, numit și Albius, a crezut și el în cuadratură și a publicat soluția ce a aflat-o în cartea *Chrysaespis seu cvadratura circuli* (loc. cit. nr. 163, p. 628). Prietenii lui i-au arătat greșeala ce a făcut-o în raționamentul care-i dăduse iluzia că atinsese culmile visate și el a recunoscut-o. Dar, pentru sufletul lui, această deziluzie a fost prea grea ca să o poată uita și durerea acestui vis pierdut i-a umbrit ochii pentru tot restul vieții lui!

— Dar lăsați-i pe cei mîhniți deoparte, *vae victis* e legea celor ce se dau bătuți, a spus dintr-o dată d'Alembert. Eu îi prefer pe cei ce nu cedează, au mai mult haz. Așa că îl rog stăruitor pe domnul Secretar al Academiei, să ne prezinte această figură energică, care mă privește, parcă sfidîndu-mă. În ochii lui nu văd pic de melancolie, ci o batjocură suverană! Cine-i vă rog?

DVE LETTIONI
DI PIETRANTONIO
CATTALDI BOLOGNESE
FATTE NELL'ACADEMIA
del Disegno di Perugia,
ALLI GENEROSI, ET VIRTVOSISSIMI
Signori Academici, il Signor Cavalier Paciotto,
& il Signor Cauliero Anastagi.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi MDLXXVII.
Con licenza de' Superiori.

Coperta cărții de aritmetică a lui Antonio Cattaldi

— A ! a exclamat Condorcet, stînd un moment în cumpănă, căci, dintr-o dată, prietenul său îi schimbase planul ce și-l făcea pe măsură ce vorbea. S-a uitat la el și a înțeles că această intervenție o făcuse anume ca să-l pună în încurcătură. Însă chiar în clipa aceea, i-a răsărit în minte numele de care avea nevoie și, aruncînd o privire jucăușă către cel ce l-a întrebat, a continuat, cu perfectă naturalețe :— Permiteți-mi, domnule academician, să vi-l prezint pe Bertrand de la Coste, inginer francez, domiciliat în Hamburg. Domnia sa a publicat chiar în anul 1666,— cînd marele Newton punea temelie de nezdruncinat teoriei luminii și a început cercetările lui asupra gravitației —, marea lui operă asupra cuadraturii cercului. Am să vă cer scuze dacă memoria mea va omite ceva din strălucitorul titlu al acestei distinse creații, titlu pe care eu mă voi strădui să-l redau cît mai fidel : *Demonstrarea cuadraturii cercului, care este singura coroană și subiect important din întreaga matematică, în care se vede particula despre care vorbește Arhimede, pe care au căutat-o fără să o poată afla atîția oameni destoinici și filozofi înțelepți, începînd cu sute de ani î.e.n. și prin același mijloc se poate vedea*

linia ruletei, pe care încă nimeni nu a găsit-o, fiindcă nu a putut descoperi cuadratura cercului.

— Bravo ! au aplaudat cu toţii deodată, rîzînd în hohote, în timp ce Condorcet își ștergea sudoarea de pe față, privindu-l pe d'Alembert să vadă efectul farsei ce i-o jucase. După ce a înțeles că prietenul său s-a recunoscut bătut, a continuat cu o prefăcută gravitate în glas :

— Cartea, tipărită la Hamburg, a avut două ediţii la interval de 11 ani. Văzînd că nici o Academie de ştiinţe din lume nu s-a grăbit să prezinte laudele cuvenite autorului, și avînd el o părere prea bine stabilită despre activitatea academicienilor și mai ales despre *curiozitatea ştiinţifică a savanţilor, cînd era vorba de a aprecia descoperirile altora,* s-a decis să trimită opera sa academicianului *Carcavi* rugîndu-l pe el să o prezinte Academici de Ştiinţe din Paris. Nici acest savant nu s-a grăbit să o facă, desigur din invidie ! Așadar, prietenul nostru inginer, avea tot dreptul să-și verse năduful și a făcut-o din plin, mai ales că avea talent și scria foarte ușor. A publicat, deci, patru volume și nu am greși numindu-le după pilda celor antici „Carcaviene". În ordine cronologică, ele au următoarele titluri : *Ceasornicul deşteptător, pentru a-i trezi pe pretinşii matematicieni de la Academia regală de Ştiinţe ; Lumea dezamăgită sau demonstrarea celor două medii proporţionale ; Nu mai amăgiţi pe nimeni, sau urmare deşteptătorului și, în fine, Nu-i moartea guzganilor şi nici a şoarecilor, ci a academicienilor din Paris sau trisecţia unghiului* (loc. cit. nr. 163, p. 627).

— Bravo lui ! Așa mai zic și eu, — a aplaudat d'Alembert —, avea omul dreptate ! Și acum, pe cine aveţi de gînd să ne prezentaţi? Poate niște iluminați?

— A nu, domnule d'Alembert, am să mă opresc la acest grup de oameni simpatici înspre care mă cheamă privirile domnului Guibert. Îi vedeți ? Ei au *pasiunea rămăşagului,* dar nu a unui rămășag obișnuit, ci a unui rămășag pe cuadratura cercului !

— Cum vine asta? a întrebat, în adevăr amuzat, Guibert.

— Foarte simplu. Vă prezint pe domnul Mathulon, un mare fabricant din Lyon (loc. cit. nr. 163, p. 625). În afară de fabrică, a avut numai două pasiuni : *cuadratura cercului* și *perpetuum mobile.* După lungi și obositoare meditaţii, și tot după atît de istovitoare încercări, el era

convins că a reușit să stabilească în mod precis *cuadratura cercului* și *perpetuum mobile*. Era fericit și așa de convins de realitatea descoperirilor lui încît a anunțat întreaga lume că pune rămășag pe 3 000 de franci (banii îi și depusese la o bancă) în favoarea aceluia care va fi în stare să-i dovedească *cea mai mică greșeală* în raționamentul său, fie la cuadratură, fie la perpetuum mobile !

— Dar e într-adevăr formidabil, a rostit domnișoara de Lespinasse, arătînd mult interes și încîntare.

— Formidabil va fi cînd va pierde pariul, a spus Morellet. Sînt foarte curios să aflu cine l-a cîștigat?

— Aș fi tentat să pun rămășag cu dumneavoastră, domnule abate, că nu l-a cîștigat nimeni, a propus Guibert.

— A, nu ! Nu pun niciodată rămășaguri, din principiu, dar mai ales acum, cînd știu dinainte că-l voi cîștiga, domnule conte !

— Nu vă sfătuiesc nici eu să o faceți, a reluat Condorcet, căci cîștigătorul se află chiar în tagma noastră și, dacă vreți să-l știți, este venerabilul nostru academician François Nicole, azi avînd frumoasa vîrstă de peste 70 de ani. Domnia sa însuși ne-a povestit cazul ; pe atunci era tînăr de tot, avea numai 30 de ani ... (182).

— Parcă am auzit eu ceva despre aceasta, a spus contele Chatellux. Nu cumva a fost și un proces?

— Proces? Înseamnă că Mathulon nu a vrut să plătească rămășagul? a întrebat, indignat, Guibert.

— A, nu ! Mathulon și-a recunoscut greșeala cu sinceritate și a cerut băncii să elibereze suma, însă domnul Nicole nu a vrut să o primească, cedîndu-i spitalului din Lyon ! Atunci Mathulon a considerat că nu se respectă condițiile și l-a dat în judecată pe domnul Nicole.

— Ca să-l oblige să primească el însuși banii? a întrebat mirată domnișoara Lespinasse.

— Desigur, i-a răspuns d'Alembert. Dacă a intrat în joc, trebuie să respecte și condițiile lui. Mathulon avea drept să-l dea în judecată !

— Și ce s-a întîmplat, domnule Chatellux? a întrebat tot domnișoara Lespinasse.

— Prea bine nu știu, dar mi se pare că seneșalul din Lyon a admis ca banii să fie împărțiți săracilor, fără ca domnul Nicole să-i ia el, ca să-i împartă !

— Exact așa a fost, a întărit și Condorcet.

— Vă rog să reţineţi, domnule abate Morellet, a spus Diderot, ridicîndu-se în picioare şi făcînd un gest larg cu mîna, că problema cuadraturii s-a învestit de data aceasta cu atributul caritǎţii !

— Nu ! Nu s-a învestit ea însăşi, ci a provocat, fără voia ei, acest act de filantropie şi asta-i cu totul altceva, domnule Diderot, a răspuns imediat Morellet. Dar, dacă-i vorba de rămăşaguri, de ce era nevoie să ajungem pînă la Lyon cînd am avut un caz şi mai nostim aici la Paris, acum vreo 20 de ani? Sper că marchizul de Condorcet îl cunoaşte, mai ales că, în cazul acesta, Academia a jucat şi ea un rol important.

— Onorată asistenţă, vă anunţ că e foarte tîrziu şi porţile expoziţiei în care am avut onoarea să vă conduc se vor închide curînd, a răspuns Condorcet. De aceea, acesta va fi ultimul tablou despre care, la cererea abatelui Morellet, am să vă mai spun cîteva cuvinte :

Cavalerul de Caussans a întrezărit cuadratura cercului privind un strat de iarbă de formă circulară. Avînd o imaginaţie bogată, ideile au început să-i vină, unele după altele, deslușind în cuadratura cercului multe şi felurite fapte ca : *păcatul originar, declinaţia acului magnetic, problema longitudinilor* şi multe altele. Minunîndu-se singur de amploarea pe care o poate lua această faimoasă problemă, i-a venit în minte să se angajeze, printr-o scrisoare publică, într-un rămăşag *pe toată averea lui*, ce se ridica la vreo 300 000 franci, cu acela care l-ar putea înfrunta, şi a depus ca avans 10 000 franci la notar. La acest rămăşag s-au înscris foarte mulţi concurenţi, de data aceasta şi o tînără domnişoară. Numai că rămăşagul, după cum ştiu unii dintre dumneavoastră, a fost împiedicat chiar de rege care aflase de năzbîtie şi nu dorea să-l vadă sărăcit pe acest cavaler foarte cumsecade ! Hotărîrea regală l-a jignit însă pe Cavalerul de Caussanus şi a cerut sprijinul Academiei care, bineînţeles că nu i l-a dat ! Şi acum, mai înainte de a ne despărţi, aş dori să vă atrag atenţia că numărul tablourilor despre care nu am putut vorbi este foarte mare. Aceasta pentru că, deşi în zilele noastre foarte mulţi cunosc elementele de geometrie în mod perfect, numărul cuadraturiştilor nu este deloc în descreştere, ci din contra ! Şi încă ceva ! Uitîndu-mă la datele pe care le poartă manuscrisele prezentate Academiei, am constatat cu surprindere, că cele mai multe *au*

fost scrise primăvara. Aceeași observație a făcut-o și un bun prieten care ne-a informat printr-o scrisoare, pe domnul d'Alembert și pe mine, că și Academia din Berlin tot primăvara primește cele mai multe memorii despre cuadratura cercului. Am putea trage oare concluzia că primăvara este timpul cel mai prielnic acceselor de cuadratură?

— De ce nu? Primăvara este și anotimpul dragostei, o altă problemă căreia nu i s-a putut da decît tot soluții aproximative, a replicat cu un zîmbet fin, abatele Morellet.

— Numai să nu uităm, a accentuat d'Alembert, că această aproximație poate fi dusă oricît de departe, pînă la zeci de zecimale!

Toți s-au molipsit de veselia lui d'Alembert și abia cînd l-au văzut pe Condorcet că se îndreaptă sfios către locul ce-l ocupase înainte de a-și începe conferința, treziți ca dintr-un vis, au început să-l aplaude cu admirație. Condorcet era surescitat peste măsură. Se lăsase antrenat de subiect, îl trăise întens și acum nu-și putea reveni. Fără să se lase observat, d'Alembert îi urmărea sforțarea.

Tîrziu, cînd musafirii domnișoarei Lespinasse au plecat, d'Alembert l-a condus pe prietenul său Condorcet și fiind singuri, i-a spus:

— Îmi pare rău că nu te-a putut asculta și domnu Voltaire. Ești un vulcan acoperit cu zăpadă, iubitul meu prieten.

— Zăpadă? Ce fel de zăpadă, dacă nu-i în stare să ascundă vulcanul?

— O zăpadă albă, afînată și așa de proaspătă că numai cînd mîna mea s-a aplecat, neputînd rezista ca să nu o adune în palmă, a simțit clocotind vulcanul în adînc. Vroiam să-ți spun că am terminat de citit raportul pe care l-ai pregătit ca să-l rostești contra cuadraturiștilor. Nimănui nu i-ar fi trecut prin minte că ai putut realiza un joc așa de amuzant din materialul de care te-ai folosit, ca să formulezi cu seriozitate motivele pentru care *Academia de științe ia măsuri drastice.*

XIII

ACADEMIA DE ȘTIINȚE IA MĂSURI DRASTICE

„Eroarea este fecundă"

Erasmus

Asistînd la discuțiile conduse de Condorcet în salonul domnișoarei Lespinasse, ți-a venit poate în minte, dragă cititorule, povestea lui Sisif, pe care Homer îl numea *cel mai șiret dintre muritori*. Cînd a murit, zeii, cărora el le încurcase de multe ori uneltirile, s-au răzbunat, condamnîndu-l să ridice numai cu mîinile și cu capul o stîncă uriașă, pe cel mai oblu munte din Hades. Ori de cîte ori izbutea să urce stînca pînă aproape de culme, ea se rostogolea în vale și Sisif era nevoit să înceapă munca de la capăt. Mă gîndesc că ți-ai fi putut aminti de această legendă fiindcă ea e privită ca un simbol al veșnicei agitații, a gîndirii omenești în sforțarea ei de a dezlega problemele insolubile. Și, cu toate că povestea nu o spune, îmi pare că amîndoi sîntem convinși că șiretul Sisif trebuia să fi izbutit el să-și păcălească din nou judecătorii lui supremi, găsind un mijloc de a propti stînca în vîrful muntelui ! Pînă la sfîrșitul veacului al XVIII-lea și *problema cuadraturii cercului* apărea ca o muncă de Sisif, stînca cu acest nume continuînd să se rostogolească spre valea de unde era urcată. Cît de insolubilă părea pe atunci problema, stă mărturie faimosul discurs rostit în anul 1775 de academicianul și enciclopedistul M. J. Antoine de Condorcet, la Academia de științe din Paris, prin care anunța că Academia a hotărît *să nu mai primească*, de la această dată, pentru examinare, lucrări despre cuadratura cercului, dizolvînd și comisia ce se ocupa cu cercetarea unor atari manuscrise. Discursul prezintă și acum un interes deosebit fiindcă prin el aflăm părerea asupra acestei probleme a unui matematician bine informat. Iat-o, exprimată chiar

de Condorcet : „Se poate considera această problemă din două puncte de vedere și anume : se poate căuta *cuadratura cercului întreg* sau a *unui sector oarecare*, a cărui coardă se presupune cunoscută. A doua dintre aceste probleme este privită ca absolut insolubilă ... Jean Bernoulli a dovedit că sectorul căutat poate fi exprimat printr-o funcție logaritmică reală, dar care, în forma ei, cuprinde cantități imaginare. Rezultă că nici o funcție reală, fie algebrică, fie logaritmică, nu poate reprezenta valoarea unui sector de cerc nedefinit ... Geometrii sînt mai puțin de acord asupra imposibilității primei probleme, căci se întîmplă adesea să se găsească pentru valori particulare cantități a căror expresie să fie în general imposibilă ...“

Chiar numai din acest fragment îți poți da seama că, pe atunci, *numerele imaginare* erau încă prea puțin studiate, iar despre *numerele transcendente*, acestea nu apăruseră la orizont nici măcar prin nume. Dealtfel, ai văzut că și mai tîrziu, în *Dicționarul enciclopedic* din 1789, d'Alembert a introdus, în articolul cu privire la problema cuadraturii cercului, constatarea deloc optimistă : „Dincolo de un anumit punct, care nici nu-i prea depărtat, luminile ne părăsesc și orbecăim prin beznă“. Tot în același timp, un alt ilustru geometru, J.L. Lagrange, își arăta, într-o scrisoare către d'Alembert, descurajarea sa în legătură cu stadiul la care ajunseseră cercetările geometrice : „Îmi pare că mina a început să fie prea adîncă și dacă nu se vor descoperi filoane noi, va trebui, mai devreme sau mai tîrziu, să o părăsim. Chimia și fizica oferă acum bogății mai strălucitoare și mai ușor de exploatat. De altfel, gustul secolului pare îndreptat pe de-a întregul către această parte. Nu-i imposibil ca, într-o zi, locurile de geometrie de la academii să devină ce sînt acum catedrele de limba arabă din universități“ (183). Acele *filoane noi*, pe care le aștepta pînă și fecundul matematician Lagrange, au apărut odată cu schimbările sociale urmate după revoluția franceză. Dar nu numai abundența materialului nou, care aștepta să fie cercetat de specialiști, caracterizează revoluția din secolul al XIX-lea, ci și perfecționarea metodelor de cercetare. Astfel, chiar în problema cuadraturii cercului se deschid perspective noi, legate de lărgirea concepției de număr, în care alături de numerele pozitive întregi fracționare (sau raționale) și iraționale au fost înglobate, pe rînd, și numerele *negative*, apoi cele *imaginare* și *complexe*. În privința numă-

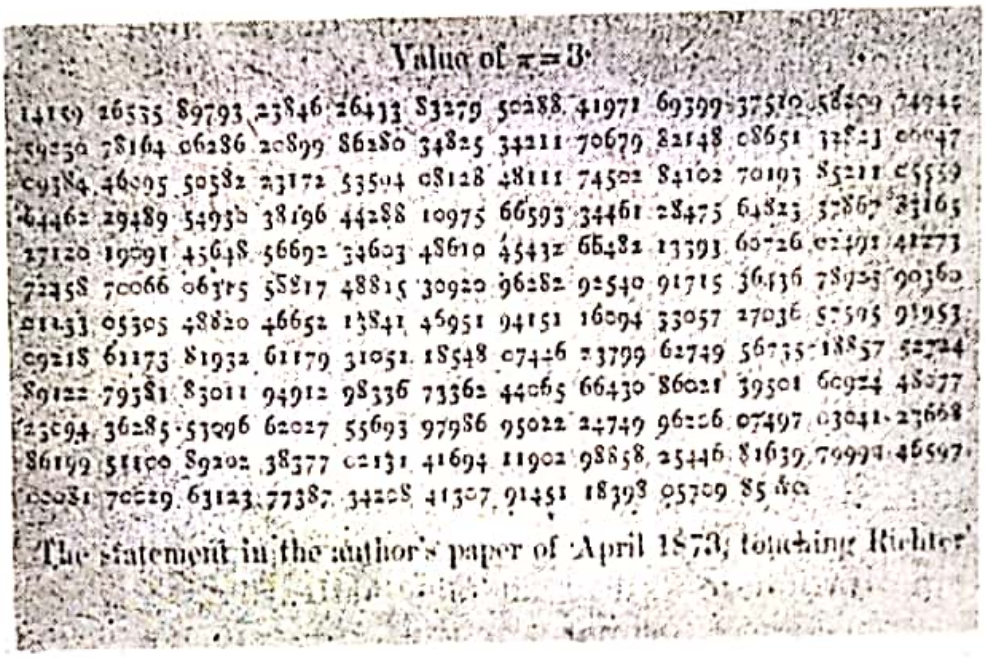
rului π, tentativa de a folosi seriile pentru a pătrunde în structura lui intimă apare ca o urmare firească a rezultatului stabilit de Wallis în *Algebra* sa din 1685, prin care se arată că fiecare număr rațional se exprimă printr-o fracție zecimală periodică. Deși reciproca acestei teoreme nu a fost demonstrată decît spre sfîrșitul veacului al XIX-lea[1], matematicienii o admiteau în mod implicit, considerînd că *orice fracție zecimală periodică nu poate reprezenta decît un număr rațional.* Din punct de vedere practic, calcularea zecimalelor numărului π, pornind de la diferite dezvoltări în serii de puteri era cea mai indicată, operația aceasta fiind cu mult mai ușoară decît ar fi fost, de pildă, dezvoltarea în fracții continue infinite (184).

Tot din studiul seriilor s-a înțeles că numerele iraționale pot fi considerate și ca limita unor serii infinite convergente de numere raționale. Și, cu toate că în ultimii ani ai secolului al XVIII-lea, Legendre demonstrase, în remarcabila sa carte *Elemente de geometrie* că atît numărul π^2 cît și π sînt iraționale și deci nu mai poate fi nici o speranță de a se găsi o exprimare a lui π zecimal periodică, cavalcada după zecimalele numărului π a continuat încă și în cursul secolului al XIX-lea. Astfel, după cele 143 de zecimale găsite de Vega, dintre care cîteva nu erau corecte, William Rutherford anunța, în 1841, un număr de 208 zecimale. Peste 3 ani, talentatul calculator din Hamburg, Z. Dase, arăta că și Rutherford se înșelase începînd cu zecimala a 152-a și, după alte calcule, mai precise, el a stabilit primele 200 de zecimale exacte ale numărului π. În 1847, Thomas Clausen din Dorpat a ajuns pînă la 248 de zecimale exacte, iar în 1833, Z. Dase prezintă 440 de zecimale, întrecîndu-l astfel pe Richter care calculase, tot atunci, numai 330 zecimale.

Dar recordul din acel an îl bate W. Shanks cu 607 zecimale. În anul următor, Richter, fără a-l depăși pe Dase, recalculează primele 400 zecimale verificînd astfel exactitatea calculelor lui Dase și peste încă un an ajunge la 500 de zecimale ale numărului π. Dar în 1873, W. Shanks a ajuns la 707 zecimale și, ca un omagiu adus acestei munci dezinteresate, aceste zecimale au fost înscrise de-a lungul unei

[1] Reciproca acestei teoreme a fost stabilită de O. Stolz (1842 — 1905), în anul 1885.

frize pe patru rînduri, în camera rotundă din *Palatul descoperirilor* din Paris (185). Pînă acum, aceste calcule au fost făcute de om, cu creion și hîrtie, folosindu-se numai tabelele de logaritmi. Calculele au continuat pînă în secolul nostru, dar cu ajutorul mașinilor electronice de calcul


Value of π = 3·

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559
64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165
27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 30920 96282 92540 91715 36436 78925 90360
01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094 33057 27036 57595 91953
09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446 23799 62749 56735 18857 52724
89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065 66430 86021 39501 60924 48077
23094 36285 53096 62027 55693 97986 95022 24749 96206 07497 03041 23668
86199 51100 89202 38377 02131 41694 11902 98858 25446 81639 79994 46597
09031 70229 63123 77387 34208 41307 91451 18393 95709 85 60

The statement in the author's paper of April 1873, touching Richter's

Cele 707 zecimale ale lui π

De pildă, în 1958 s-au stabilit primele 10 000 de zecimale ale numărului π (186). Dacă ești curios să știi cît loc ocupă aceste 10 000 de cifre, atunci află că ele sînt scrise pe 5 pagini, fiecare pagină conținînd cîte patruzeci de rînduri iar fiecare rînd cîte 50 de cifre (187).

Dar, poate că mă vei întreba, cititorule, ce s-a mai întîmplat cu cuadraturiștii după ce a fost pronunțat discursul lui Condorcet? Ei, bine, află că expunerea lui nu a avut nici un efect asupra lor, deși m-aș fi așteptat să aibă, căci eu nu ți-am citat părțile destul de aspre, adresate direct cuadraturiștilor, din cuvîntarea reprezentantului Academiei, ca de pildă: „Circulă un zvon că guvernele au promis recompense considerabile acelora care vor rezolva problema cuadraturii cercului și că această problemă face obiectul de studiu al celor mai celebri geometri. Pe baza acestui zvon, o mulțime de oameni, mai mare decît s-ar crede, renunță la ocupațiile utile, ca să se dedice rezolvării acestei probleme, adesea fără să o înțeleagă ... Mulți au nenorocirea de a crede că au reușit și nu au încredere în geometrii care le atacă soluția, — ade-

sea nici nu-i pot înțelege —, și termină acuzîndu-i de invidie și rea credință. Cîteodată, încăpățînarea lor a degenerat într-o adevărată nebunie : nu ar fi privită așa dacă această atitudine a lor nu ar influența asupra felului de viață, dacă nu ar tulbura ordinea în societate. Nebunia cuadra-

Ultima cină a lui Condorcet

turiștilor nu ar avea atunci alt neajuns pentru ei decît pierderea de timp, adesea folositoare familiilor lor. Dar, din nefericire, nebunia rareori se mărginește la un singur obiect și obiectul de aiureală se molipsește și se întinde ... Dealtfel, neputînd să-și ascundă mirarea de a fi ajuns fără studii la adevărul pe care l-au căutat zadarnic oamenii cei mai celebri, aproape toți cred că au ajuns la el printr-o protecție deosebită a providenței". S-ar putea ca *bieții cuadraturiști* să nu fi cunoscut acest discurs — ai să-mi spui — dar, află că nici Academia nu și-a făcut iluzii în puterea lui de convingere. Era și natural. Cum ar fi putut convinge cînd nu existau argumente serioase pe care să se bazeze hotărîrea luată? Așa că, de fapt, nici nu s-a desființat — după cum amenințase Condorcet — comisia de cercetare a manuscriselor asupra cuadraturii, ci s-a schimbat numai numele, devenind *Comisia copiilor pierduți*. Numirea s-a dovedit a fi fost puțin inspirată căci Academia a avut de suferit de pe urma ei ! Anume, a fost

dată în judecată de către cuadraturiști, care continuau să-și trimită manuscrisele, dar se simțeau jigniți că operele lor erau cercetate într-o comisie cu un asemenea nume ! Ba, dacă vrei să știi, au mai existat și alte încurcături. De pildă, astronomul Rohberg Herrn de Vausenville, tentat, ca și alți cuadraturiști, de sumele fabuloase pe care le anunțau, din cînd în cînd, unele gazete sau cărți greșit informate (188), a trimis, în 1778, Academiei din Paris, cartea pe care a publicat-o el despre cuadratura cercului și a așteptat să primească premiul de 50 000 de écus. Văzînd că nu-l primește a dat Academia în judecata parlamentului, trăgîndu-l la răspundere pe d'Alembert. (189). Mai nostim este că s-au găsit și escroci care au căutat să cîștige bani de pe urma cuadraturiștilor sau a acelora ahtiați să afle ce este cu ea ! Iată un exemplu : doi indivizi s-au asociat și au scos un brevet pe baza căruia au deschis un birou ce se numea *Biroul cuadraturii cercului*. Prospectul lor avea următorul cuprins : „De cînd există lumea este un raport comensurabil și constant între cerc și un poligon rectiliniu bine cunoscut. Acest raport este exact egal cu $9\frac{179}{200}$. Adresați comenzile la Biroul cuadraturii cercului (loc. cit. nr. 189, p. 319)". Desigur că au fost destui naivi care s-au lăsat înșelați, plătind taxele cerute ca să li se trimită acasă *cuadratura gata fabricată*, așa cum se trimiteau alte obiecte aflate spre vînzare.

Pe cuadraturiști îi vei mai întîlni chiar și în a doua jumătate a veacului al XIX-lea, cînd matematicienii aveau motive puternice *să afirme imposibilitatea cuadraturii cercului* și sperau să o și poată dovedi în curînd. Dar, am să-ți spun, la ureche, un secret : mai sînt și astăzi cuadraturiști cînd, *în sfîrșit, s-a descoperit adevărata identitate a numărului* π.

XIV

ÎN SFÎRȘIT, S-A DESCOPERIT ADEVĂRATA IDENTITATE A NUMĂRULUI π

„Există printre matematicieni o convingere intimă și puternică, care-i susține în cercetările lor abstracte, anume că nici una dintre problemele științei lor nu pot rămîne fără răspuns".

Gheorghe Țițeica

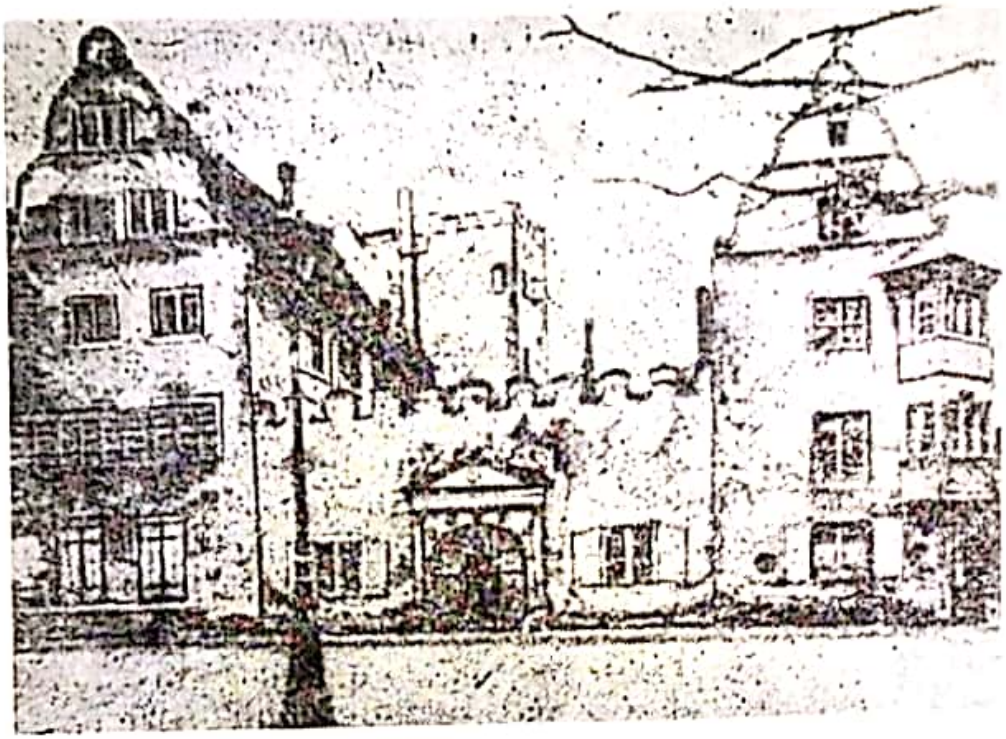
Era în dimineața zilei de 26 noiembrie 1882, la Seminarul matematic al Universității din Freiburg. De curînd, tînărul profesor de matematici de la această universitate, Ferdinand von Lindemann (191) demonstrase transcendența numărului π. Cînd a apărut această lucrare (192), ea a stîrnit mult interes, nu numai în cercul restrîns al matematicienilor, ci și în acela al studenților de la această universitate și al multor intelectuali din lumea întreagă, dat fiind că problema despre natura numărului π își păstrase actualitatea în decursul a peste 3 000 de ani !

Din această cauză, studenții secției de matematici l-au rugat pe profesorul Lindemann să accepte ca istoria numărului π să formeze obiectul unui simpozion pe care să-l conducă. Bucuros de această propunere, profesorul a schițat planul de lucru și a fixat data comunicărilor.

În ziua anunțată, sala de curs în care se adunase cu mult mai mult public decît era de obicei, pierduse ceva din intimitatea de altădată, în schimb căpătase un caracter mai festiv. Înainte de a se fi adunat lumea, un student atîrnase pe peretele de lîngă tablă un tablou. Era o caricatură la adresa cuadraturiștilor. În colțul din stînga, de sus, se vedea un cerc înlănțuit de un pătrat de arie egală cu el, în interiorul căruia se afla litera π. De la această literă pornea un fulger, în zigzag, îndreptat către un grup de oameni înspăimîntați ce ocupau colțul opus și care fugeau cu capetele întoarse înspre cerc. Dedesubt scria : „Bieții cuadraturiști".

Primit cu aplauze, profesorul Lindemann a mulțumit și a deschis ședința dînd cuvîntul primului student ce avea

să dezvolte tema : *Metoda de determinare a ariei și lungimii cercului în antichitate.* Studentul și-a expus cu claritate problemele, amintind de rezultatele cunoscute din preistorie și apoi analizînd pe cele rămase de la egipteni și babilonieni. De aici a trecut la matematicienii greci după ce,



Universitatea din Freiburg

în prealabil, a accentuat deosebirea creată în însuși modul de a gîndi problemele geometrice, odată cu apariția acestora în cadrul istoriei matematicilor. A insistat, îndeosebi, asupra importanței pe care o dădeau matematicienii greci nu numai la formularea teoremelor din geometrie, ci și la desenarea cu precizie — folosind rigla și compasul — a figurii asupra căreia se punea problema și, în fine, la stabilirea raționamentului într-o formă riguroasă. *Ținînd seama de definirea noțiunilor abstracte ce interveneau în problemă, pe care se baza raționamentul respectiv,* — a spus studentul—, *concluziile stabilite se dovedeau independente de figura ce fusese construită cu atîta grijă.* Această lungă introducere i-a dat posibilitatea să expună problema cuadraturii așa cum au formulat-o grecii arătînd că ea era insolubilă numai sub această formă de construcție cu rigla și compasul.

În încheiere, studentul a vorbit despre lucrările lui Hipocrat, despre soluția lui Dinostrat, despre încercările lui Antifon și Bryson de a elucida problema și tocmai

Ferdinand Lindemann

pe cînd se pregătea să enunțe concluziile ce decurgeau din aceste cercetări, ca să le pună față în față cu genialele rezultate ale lui Arhimede, profesorul Lindemann a dat cu ochii peste desenul din perete. Surprinderea a fost așa de mare încît a izbucnit pe dată în rîs și ridicîndu-se în picioare a aplaudat întrebînd : Cine-i autorul acestui desen? Merită să-l felicit !

— Noi, au răspuns, cu un zîmbet timid, mai multe voci din ultimele bănci.

— Așadar, un colectiv? Bravo, ați avut o frumoasă inspirație, le-a răspuns profesorul reluîndu-și locul și cerîndu-și scuze pentru întrerupere.

În această atmosferă de destindere și bună dispoziție, studentul a continuat cu mai mult elan să pună în evidență realizările excepționale ale lui Arhimede, care a știut să extragă *consecințele practice din raționamentele teoretice*, rămase sterile pînă atunci.

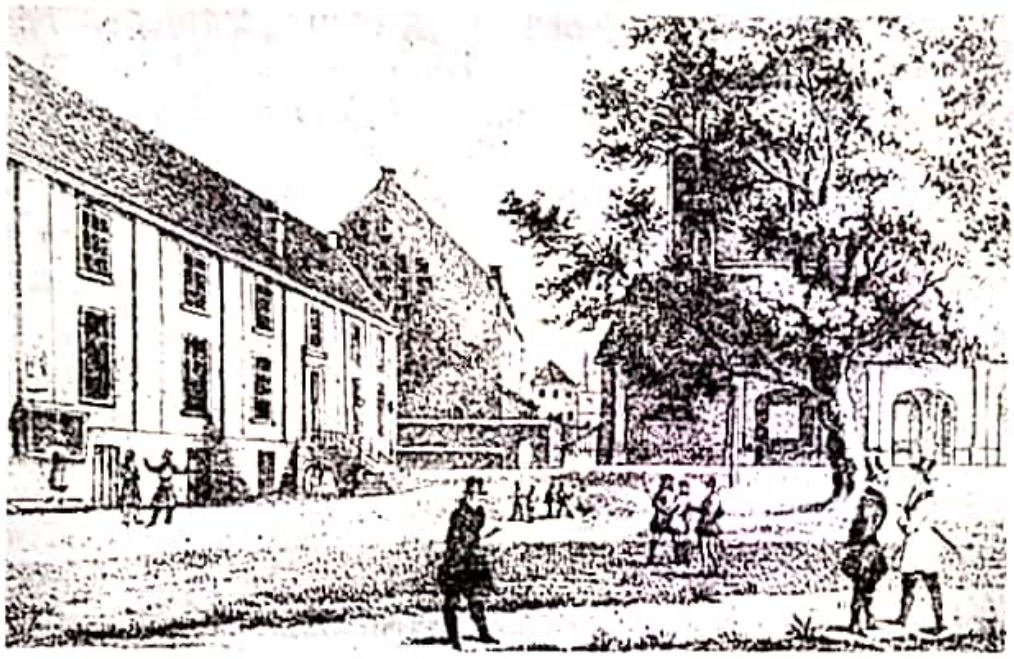
Ascultîndu-l, profesorul Lindemann s-a lăsat furat de gînduri ... Se vedea din nou student, expunînd cu aceeași ambiție abia stăpînită, primele sale rezultate pe care le obținuse odinioară, la Göttingen, pe cînd lucra la teza lui de doctorat sub conducerea profesorului Alfred Clebsh.

Cu 9 ani în urmă, el și-a susținut această teză, dar nu la Göttingen, așa cum visase, ci la Erlangen și nu sub conducerea profesorului pe care l-a venerat, ci a lui Felix Klein, un matematician de mare valoare, dar numai cu cîțiva ani mai mare decît el ... Da, așa a fost să fie ! Înainte de a-și fi terminat teza, profesorul lui a murit pe neașteptate și atunci, în locul vacant, a fost chemat elevul lui, Felix Klein, care fusese numit profesor cu puțină vreme mai înainte, la Erlangen. Se mai gîndea și la lecțiile de geometrie ale profesorului Clebsh pe care le audiase el odinioară și la redactarea cărora lucrase cu dragoste și pasiune în timp ce-și pregătea teza, la emoțiile și bucuria ce a avut-o cînd a văzut acele cursuri tipărite ... Azi era o zi deosebită din viața lui și, în mare parte, o datora profesorului Alfred Clebsh. Se gîndea la el acum și ar fi dorit ca acest gînd să-l împărtășească întregii asistențe, ca un pios omagiu adus de ucenic maestrului.

Cînd studentul a terminat expunerea, profesorul Lindemann a venit la catedră și după ce a accentuat, în cîteva fraze, ideile principale pe care urma să se bazeze cel de al doilea student, i-a mulțumit vorbitorului și a invitat pe celălalt student la tablă, în timp ce el și primul student s-au îndreptat înspre bănci. Acesta a anunțat că se va mărgini să urmărească mai îndeaproape : *Metodele geometrice folosite de matematicienii europeni din Renaștere și din epoca modernă, legate de determinarea numărului* π.

Profesorul Lindemann cunoștea îndeaproape referatele studenților lui, de aceea gîndurile au prins să hoinărească din nou ... Și-a amintit de venirea lui aici, acum trei ani, chemat ca profesor de la Universitatea din Wurzberg unde era privat-docent. De atunci se atașase de noii lui studenți și își făcuse cîțiva prieteni buni printre colegi. Ce se va alege din aceste prietenii — se gîndea el —, acum cînd foarte probabil că la anul nu voi fi aici, ci la Universitatea din Königsberg, unde mi s-a propus să fiu chemat, în locul profesorului Heinrich Weber care trece la Universitatea din Berlin? ... Să refuz oare această cinste? Așa se întreba, cu inima strînsă, pe cînd cel de-al doilea student ștergea desenele pe care le folosise ca să facă loc altora ce aveau să arate cum a calculat Viète sau Romanus primele 9, respectiv 15, zecimale ale lui π și cum a făcut-o Snellius. Mai departe, s-a ocupat de metoda izoperimetrelor. Profesorului Lindemann i-a plăcut atenția pe care o punea

studentul să deseneze figurile cît mai corect, să pună în evidență segmentele asupra cărora avea să facă raționamentele. L-a privit, zîmbindu-i încurajator, iar după ce a schițat și metoda izoariilor, din nou, profesorul Lindmann a caracterizat problemele considerate și a chemat pe cel de-al treilea student să vorbească *Despre metodele analitice preconizate la matematicienii din ultimele secole ca să aproximeze numărul* π.



Universitatea din Königsberg

— Analiza matematică, a început acesta, căutînd să-și dreagă vocea răgușită de emoție, este aceea care a deschis calea către identificarea numărului π.

Legînd cele spuse de colegul său cu problemele noi pe care avea să le dezvolte el, a început prin a scrie formulele stabilite de Viète, Wallis, Brouncker ca să treacă apoi la prezentarea seriilor, insistînd asupra avantajelor ce le prezentau ele în aproximarea valorii numărului π cu ajutorul numerelor raționale. Prinzînd curaj, vocea i-a devenit clară și vorbele curgătoare așa că, atunci cînd a încheiat, știind că după el va urma la cuvînt chiar profesorul său, l-a privit drept în ochi și, inspirat de moment a spus repede, aproape pe nerăsuflate : „Ademeniți de aria cercului, matematicienii și calculatorii amatori au crezut că pot să prindă numărul π în lanțul făcut de sutele lui de zecimale dar totul n-a fost decît o amăgire căci pînă acum

nimeni nu a putut spune ce fel de număr este π. *Pînă acum, nu, dar acum, da* ! Acum există cineva care a aflat-o și domnia sa este printre noi, aici. De aceea, îl rugăm respectuos pe profesorul nostru drag să ne arate și nouă cum a descoperit adevărata identitate a numărului π".

În aplauzele ce le-a stîrnit verva celui de-al treilea vorbitor, profesorul Lindemann, care nu se aștepta la această introducere, a păşit spre tablă strîngînd mîna studentului ce se îndrepta către locul lui. O clipă a privit înspre ochii ce-l aţinteau cu încordare şi a gustat liniştea ce se aşternea în sală. În această liniște a evocat el, mai întîi, personalitatea profesorului său, Alfred Clebsh, cerînd permisiunea să dedice această şedinţă, ca un omagiu de recunoştinţă, memoriei sale. Şi peste cîteva clipe, a început astfel: „În decursul veacurilor, noţiunea de număr şi-a lărgit treptat conţinutul. Întîi au fost intuite numai *numerele întregi.* Mai tîrziu s-a format noţiunea de *număr fracţionar* ; ea a apărut o dată cu problemele de împărţire a numerelor întregi, prime între ele. (193). Cu excepţia matematicienilor greci, numerele întregi şi fracţionare au fost incluse în *clasa numerelor raţionale* de către toţi matematicienii antici. Numai grecii aveau altă concepţie despre numere. Pentru ei, doar numerele întregi aveau calitatea de a fi numere, cele fracţionare reprezentau *măsura lungimii unui segment,* construit cu rigla şi compasul, cu un alt segment — unitate — construit în acelaşi fel, aceste două segmente fiind comensurabile între ele. De aceea se şi spune, adesea, *număr comensurabil* în loc de *număr raţional.* Dar tot geometrii greci au arătat că există şi *segmente care nu sînt comensurabile* cu o unitate de lungime dată. Ei au dat exemple de segmente de dreaptă ce se pot construi cu rigla şi compasul, dar a căror lungime nu se mai poate exprima prin cîtul a două numere întregi. Clasică este construcţia arătată de Platon : „Să se găsească latura pătratului cu aria de două ori cît a unui pătrat de latură a". Se ştie bine că latura pătratului de arie $2a^2$ (fig. 13) este egală cu diagonala pătratului de arie a^2 şi deci latura celui de al doilea pătrat poate fi construită cu rigla şi compasul, deşi *mărimea acestui segment nu se poate exprima printr-un număr fracţionar* (194). De ce este aşa? Pot exista şi mărimi ce nu se exprimă prin numere întregi? s-au întrebat grecii. Neştiind ce să răspundă, ei au numit măsura acestor segmente *nelogică,* numire de la care se

trage și aceea de *număr irațional*. Geometrii greci au descoperit și lucruri mai curioase : Vrînd să construiască un cub, al cărui volum să fie de două ori mai mare decît al altui cub de latură *a*, nu au mai reușit să construiască acest segment cu rigla și compasul.

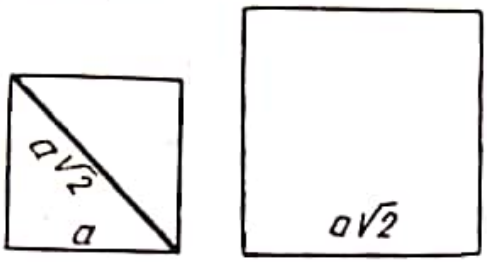


Fig. 13

— Este celebra *problemă delică*, s-au auzit dintr-o dată mai multe voci vesele și grăbite din bănci.

— Aveți perfectă dreptate, le-a răspuns profesorul Lindemann. Această problemă a devenit celebră din cauza nenumăratelor sforțări zadarnice de a o dezlega. În jurul ei s-a creat și o legendă pe care o cunoașteți prea bine. De altfel, pătimașii adoratori ai geometriei s-au întrecut să mai găsească și alte probleme asemenea acesteia, și au găsit. Printre ele este și aceea a *cuadraturii cercului*.

Am dat aceste exemple pentru a arăta că noțiunea de număr este mult mai complicată decît pare la prima vedere. Pe de o parte sînt numerele întregi și fracționare, adică *numerele raționale* și pe de alta, *numerele iraționale*. Deosebirea dintre ele este fundamentală căci mărimea celor raționale se poate *cunoaște precis*, ele exprimîndu-se prin cîtul dintre două numere întregi, pe cînd despre un număr irațional se poate spune *că este cuprins* între două numere raționale care-i stabilesc astfel numai mărimea *prin exces* sau *prin lipsă* (195). În această clasă a numerelor iraționale, despre care nu se știa altceva decît că *nu sînt raționale*, se întîlneau numere cu proprietăți diferite : unele care sînt măsura unor segmente ce se pot construi cu rigla și compasul, iar altele, pentru care această construcție nu poate fi executată. Foarte multă vreme nu s-a putut spune nimic altceva despre ele. Pe la sfîrșitul veacului al XVI-lea, s-a mai aflat ceva nou : *numerele raționale* se exprimau întotdeauna printr-o *fracție zecimală infinită periodică* pe cînd cele iraționale, nu. În veacul al XVII-lea, după ce Descartes și Fermat au pus la îndemîna matematicienilor acel instrument nou și minunat de cercetare, numit *geometria analitică*, s-a făcut un pas și

mai departe, fiindcă s-a putut explica, și totodată stabili, care este *natura problemelor* ce permit construcții cu rigla și compasul. Acum nu mai pare un secret faptul că orice construcție cu rigla și compasul se reduce, în geometria analitică, la rezolvarea unui *șir finit* de ecuații de gradul întîi și doi cu coeficienți raționali sau în care numai prima ecuație are coeficienți raționali, iar în celelalte pot apărea drept coeficienți rădăcinile iraționale rezultate din rezolvarea primei ecuații și invers. Știm, de exemplu, că problema dublicării pătratului se poate rezolva cu rigla și compasul căci ecuația $x^2 = 2a^2$ este de gradul al doilea. Din contra, problema implicării cubului, conduce la o ecuație de gradul al treilea : $x^3 = 2a^3$ și prin urmare, rădăcina acestei ecuații $x = a\sqrt[3]{2}$ este lungimea unui segment, ce nu se poate determina prin intersecții de drepte și cercuri, ci numai prin intersecții de curbe de ordinul 3 !

Iată însă și un alt rezultat *extraordinar, de neașteptat*, care s-a detașat din aceste considerații asupra numerelor iraționale ca rădăcini ale unor ecuații algebrice de rangul doi sau trei : numerele raționale și cele iraționale nu se mai găsesc *despărțite în două clase distincte*, ci, din contra, *reunite într-o singură clasă*, clasa *numerelor care sînt rădăcinile unor ecuații algebrice cu coeficienți raționali*. Numărul întreg 3 este rădăcina ecuației $x = 3$, numărul fracționar $\frac{5}{4}$ este rădăcina ecuației $4x = 5$, numărul irațional $\sqrt{2}$ este rădăcina ecuației algebrice $x^2 = 2$ și așa mai departe.

Prin generalizarea acestei idei se ajunge la o cunoaștere mai adîncă a naturii unui număr și anume, putem vorbi despre *numerele algebrice reale* (196), sau despre numerele care *nu sînt algebrice*, provenind din rădăcinile acelor ecuații algebrice care nu mai au coeficienți raționali sau ale ecuațiilor care nu sînt algebrice (197). Și dacă mergem nu mai departe, decît pînă la ecuația prin care se exprimă cuadratura cercului : $x^2 = \pi r^2$, avem cel mai vizibil exemplu de o ecuație care poate fi tot așa de bine *algebrică* ori *nealgebrică*. Oare vi se pare curios, cele ce am afirmat? Nu ar fi cazul, și iată de ce : în această ecuație *de gradul al doilea*, apare un număr care nu este nici întreg, nici fracționar, anume numărul π. Dacă acest număr π este un *număr rațional*, atunci ecuația pe care am considerat-o este o ecuație algebrică de gradul al doilea. De aici rezultă că latura x a pătratului de arie exact egală cu a cercului de

rază r se poate construi cu rigla și compasul și deci cuadraturiștii au tot dreptul să caute această construcție. Dar, dacă π nu este un număr rațional, ci irațional, atunci ecuația aceasta nu mai este algebrică și cuadratura cercului este imposibilă ! De aici încep și neînțelegerile ! Cuadraturiștii consideră că π este un număr rațional, luînd de bună o valoare dubioasă stabilită de ei printr-un raționament greșit sau incomplet, însă pînă acum *nimeni nu a demonstrat, în mod riguros, că numărul* π *este rațional.* S-ar părea că ne învîrtim într-un cerc vicios : problema cuadraturii cercului rămîne insolubilă atîta vreme cît nu se poate stabili care este natura numărului π și natura numărului π depinde de posibilitatea sau imposibilitatea cuadraturii cercului ! Ca să ieșim din această dilemă, să revenim la numerele iraționale, așa cum ne apar privindu-le prin prisma ecuațiilor algebrice. Trebuie să știți că marele Euler care, după cum veți vedea mai tîrziu, a avut o largă contribuție în dezlegarea misterului legat de numărul π, nu-și închipuia că ar putea exista și altfel de numere iraționale *în afară de acelea care se exprimă prin radicali,* fiindcă el, ca și mulți matematicieni din veacul al XVIII-lea, era convins că orice ecuație algebrică, de orice grad întreg n, *se putea rezolva prin radicali.* De-abia în 1822, *Niels Abel* a stabilit teorema, fundamentală pentru algebră, că ecuațiile algebrice de gradul 5, sau mai mari decît 5, nu se pot rezolva prin radicali (198). Prin această demonstrație s-a făcut iar un pas înainte spre cunoașterea naturii numerelor iraționale algebrice : *sînt numere iraționale algebrice ce se exprimă prin radicali sau printr-un număr finit de radicali* și *există numere iraționale algebrice ce se exprimă în alt mod și nu prin radicali* (199). În lumina acestor noi descoperiri, matematicienii erau îndrituiți să se întrebe dacă nu există și *numere iraționale de altă natură decît algebrică și le-au căutat.* Căutîndu-le, le-au găsit. Începutul l-a făcut matematicianul francez Joseph Liouville care, acum 38 de ani, a arătat că există clase foarte largi de numere pe care el le-a numit întîia oară *transcendente* (200), ale căror valori nu sînt nici *raționale* și nici *iraționale algebrice.* El a arătat cum poate fi determinată o anumită categorie dintre ele. Tot el a mai găsit, în 1851, alte clase de numere transcendente. Iată-ne, dar, înconjurați de numere a căror natură, nimeni din veacul trecut nu ar fi bănuit-o ! Știm cum se pot forma numerele transcen-

dente și totuși știm încă foarte puțin despre ele fiindcă nu putem spune nimic despre natura unui număr *dacă nu cunoaștem modul cum s-a format, ecuația din care a provenit*! Așa se întîmplă cu numărul π. Nu știm să scriem nici o ecuație care să aibă ca rădăcină numărul π, ca să putem spune ceva despre el. Nu face parte nici din categoriile numerelor transcendente, găsite de Liouville sau alți matematicieni. Existau însă cercetări anterioare care puneau în evidență iraționalitatea numărului π. Astfel, în 1767, J. H. Lambert (201) a demonstrat pentru prima oară că numărul π este *irațional*, bazîndu-se pe o formulă ce o stabilise anterior și anume, dezvoltînd în fracție continuă $\operatorname{tg} \frac{1}{n}$. Formula dedusă de el este:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{n} = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cdots}}} \qquad (n = 1,2,3\ldots)$$

Ea arată că $\operatorname{tg} \frac{1}{n}$ (dacă n este întreg) este un număr irațional deoarece se exprimă printr-o fracție continuă infinită. Or, încă din 1719, T. F. de Langy observase că dacă tangenta trigonometrică a unui arc este un număr irațional, arcul este rațional. Acest fapt îl dovedea acum formula stabilită de Lambert. Rămînea să se demonstreze și reciproca acestei teoreme și a făcut-o tot el. Așa fiind, din faptul că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, apare evident că $\frac{\pi}{4}$ este un număr irațional. Peste 27 de ani, adică în 1794, A. M. Legendre a găsit o nouă demonstrație — mai riguroasă, aș putea spune —, nu numai pentru iraționalitatea lui π, ci și a lui π^2. Desigur că acest rezultat era foarte important, însă el nu era decisiv, căci numerele transcendente nu fuseseră încă descoperite și, deci, *nu se știa că există și altfel de numere iraționale în afară de cele iraționale algebrice*. Cuadraturiștii erau de părere că numărul π, chiar dacă este irațional, ar putea proveni dintr-un șir finit de ecuații algebrice de gradul întîi și al doilea, care au avut coeficienți raționali. În acest caz, era dată posibilitatea construirii pătratului căutat, cu rigla și compasul. Faptul devenea mai puțin probabil după 1844 cînd a fost dovedită existența *numerelor iraționale transcendente*, acelea care nu sînt rădăcinile nici unei ecuații algebrice cu coefi-

cienți raționali. Abia după această dată, matematicienii s-au întrebat dacă numărul π este *irațional algebric* sau *irațional transcendent*? Și numai dacă s-ar putea stabili că π este un număr *irațional transcendent*, atunci ar fi dovedită imposibilitatea cuadraturii cercului. Sub această formă nouă, problema a pasionat pe mulți matematicieni. Acum 9 ani, profesorul Charles Hermite a dat o nouă demonstrație pentru iraționalitatea numărului π și a lui π^2. Această demonstrație nu aducea nimic nou și totuși ea a fost primită cu deosebit interes. Dar și mai mare admirație și entuziasm a stîrnit o altă lucrare a profesorului Hermite (202), publicată în același an, aceea în care dovedea *transcendența numărului e*. Dumneavoastră știți cu toții că numărul „*e*" a fost ales de Neper ca bază a sistemului său de logaritmi și că valoarea lui aproximativă este $e = 2{,}71828...$ Despre natura numărului „*e*" nu se știe însă nimic mai mult decît despre natura numărului π. Se stabiliseră și pentru *e* dezvoltări în fracții continue infinite, în serii infinite, ceea ce arăta că și *e* era un număr irațional. Acum însă, profesorul Hermite făcuse ceva extraordinar, ceva miraculos aș putea spune, fiindcă nimeni nu se aștepta că acest prag ar fi putut să fie trecut. El a arătat că numărul *e* este transcendent, adică nu poate exista nici o ecuație de forma

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + ... + N_n e^{z_n} = 0$$

în care coeficienții $N_0, N_1, ..., N_n$, precum și exponenții $z_0, z_1, ..., z_n$ să fie numere întregi, *astfel ca una dintre rădăcinile ei să fie numărul e*. Aceasta înseamnă că o asemenea relație *este imposibilă* atunci cînd coeficienții și exponenții ar fi numere întregi.

Vă mărturisesc că am citit această demonstrație cu o emoție adîncă. Am citit-o și recitit-o și nu mă puteam desprinde de paginile ce o conțineau (202), fiindcă printre șirurile acestui articol eu întrezăream și metoda de a demonstra transcendența numărului π. Ușor nu a fost și cred că dacă nu aș fi avut un moment de inspirație, ca să pot stabili calea către această demonstrație, nu aș fi reușit să o fac. Și iată de ce spun aceasta: citind lucrarea profesorului Hermite, mi-a venit în minte o formulă celebră a lui Euler care leagă funcția exponențială de argument imaginar e^{ix} de funcțiile trigonometrice sin x și

cos x, anume, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Această formulă este cu adevărat surprinzătoare căci dacă $x = \pi$, atunci se obține relația $e^{i\pi} = -1$[1] (203). Ea a fost inspirația mea căci în această formulă apar împreună numerele e și π legate, parcă, într-un mod fantastic: *numărul real* e, ridicat la *puterea imaginară* $i\pi$, *dă un rezultat real*, anume -1!

Or, această formulă $e^{i\pi} = -1$ mi-a răsărit deodată înainte, pusă sub forma $e^{i\pi} + e^0 = 0$ care, după cum vedeți, era asemănătoare ecuației lui Hermite. Spun asemănătoare ca formă, căci în fond era fundamental deosebită.

— Desigur, s-a ridicat un student, adăugînd: *unul dintre exponenții lui* e *nu mai era întreg*, ca în ecuația profesorului Hermite, ci era un *număr irațional.*

— În adevăr, așa este și, vedeți, de aici înainte nu a mai fost vorba de inspirație, ci, așa cum au mai spus-o și alții înaintea mea, de transpirație. A trebuit să stabilesc o generalizare a rezultatului obținut de profesorul Hermite pentru cazul cînd în ecuație s-ar înlocui toate numerele întregi prin *numere iraționale algebrice* oarecare. Acest rezultat nu l-am putut stabili dintr-o dată, de aceea am început cu cîteva cazuri particulare, mai ușor de tratat. Abia după aceea am putut dovedi că nu este posibilă o relație de forma $a_0 e^{b_0} + a_1 e^{b_1} + \ldots + a_n e^{b_n} = 0$, dacă numerele $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ sînt numere iraționale algebrice. Or, atunci, a urmat în mod evident că, dacă există relația $e^{i\pi} + e^0 = 0$, în care coeficienții sînt numere raționale iar unul dintre exponenți este zero (204)...

— ... atunci exponentul primului termen nu mai poate fi un număr irațional algebric căci, dacă ar fi. ar contrazice teorema domnului profesor Lindemann — au strigat cîțiva studenți în cor iar asistența a aplaudat satisfăcută.

Cînd profesorul Lindemann a părăsit sala de curs, studenții lui s-au grăbit să-l ajungă. Lindemann s-a întors spre ei și i-a întrebat:

— Aș vrea să știu ce ați aplaudat voi mai mult, reușita simpozionului nostru sau faptul că s-a terminat și ne putem duce să bem o bere în cinstea lui π, așa cum am proiectat?

---

[1] Această formulă se găsește încrustată deasupra unei uși a secției matematice din *Palatul descoperirilor* din Paris.

— Amîndouă, — a răspuns un student —, căci admiţînd că aplauzele au fost provocate numai de emoţia transcendentă a comunicărilor, atunci... atunci...

— Ei, vezi că te-ai încurcat? — a rîs Lindemann ieşind în stradă, împreună cu grupul de studenţi care îşi necăjeau colegul ce încercase să parodieze teorema discutată de profesor.

După o plimbare prin oraş, cu toţii s-au aşezat la o masă, în camera din fund a cafenelei studenţeşti din Freiburg. Erau în vervă, convorbirile nefiind întrerupte decît de clinchetul cănilor cu capac, pe care unii le ciocneau între ei iar alţii le ridicau numai în sus, înclinînd din cap către careva şi mai ales către profesor şi sorbeau după ce le băteau de faţa de masă.

— Da, răspunse profesorul, aşezat în capul mesei, studentului din capătul opus, cu care legase de cîteva clipe o discuţie — , ai foarte multă dreptate. Gîndurile oamenilor ce se străduiesc să dezlege aceeaşi problemă, se adună, ori de unde ar fi ei şi chiar în orişice epocă ar fi trăit... Le-am putea compara cu nişte pîrîiaşe de munte, unele şerpuiesc printre stînci, altele aleargă printre copaci, altele îşi croiesc drumul de-a dreptul, ca o cascadă, dar toate se întîlnesc în vale, vărsîndu-şi apele în acelaşi pîrîu sau rîu.

—Tumultuos trebuie să mai fi fost rîul gîndurilor lui π cîndva... De acum înainte însă, se va domoli şi va curge liniştit şi adormit ca şi bătrînul nostru ceh, a remarcat cu seriozitate de filozof, studentul de alături, ce ascultase conversaţia, privind cu un zîmbet provocător către colegul pe care-l numise „bătrînul nostru ceh". De loc din Praga, studentul vizat, venise abia în acel an la Freiburg. Era tăcut din fire, uscăţiv, cu părul blond dat peste spate şi chiar de la prima lor întîlnire, unul dintre colegi i-a dat această poreclă şi cu ea a rămas.

— Te-nşeli, copilandre, — i-a replicat acesta vesel. Nu-s deloc adormit ! Gîndeam ! Mă chinuia o melodie care îmi cînta mereu în urechi, încă din sala de curs şi nu-mi puteam aduce aminte, de unde este? Cînd am auzit-o?... Ştiam precis că făcea parte dintr-un *poem simfonic*, dar care? Mi-a apărut aşa, *ca o imagine sonoră a numărului* π, şi a stăruit tot timpul cît vă ascultam vorbind, pe fiecare dintre voi şi chiar pe domnul profesor ! Totuşi, eram foarte atent, vă rog să mă credeţi ! Iar acum, dintr-o dată, cînd

am auzit cuvintele *pîrîiaşe, pîrîu, rîu*, totul mi s-a limpezit în minte...

— De unde rezultă că erai puţin ameţit mai înainte de a bea bere, iar acum te-ai ameţit de tot şi visezi ! Ce are poemul simfonic cu numărul π? *Quod erat demonstrandum !* — i-a răspuns cel ce-l zădărîse şi toţi din jurul lui au început să rîdă şi să bată cu cănile de bere în masă.

— Liniştiţi-vă ! a intervenit, ridicînd mîna, profesorul. Eu nu sînt de părerea voastră, cred că în cursul raţionamentului aţi greşit pe undeva ! Nici unul dintre voi nu a avut vreodată impresia *că-i cîntă gîndul ca o melodie*, înainte de a i se formula în vorbe?

— Da, domnule profesor, a răspuns cehul transportat, exact aşa mi se întîmplă mie de multe ori... poate fiindcă ador muzica, mai ales cea instrumentală. Cînd o ascult, trezeşte în mine ecourile unor stări trăite parcă undeva, de mult de tot, de care nu-mi mai pot aduce aminte... Şi poate că de aceea, uneori se desfăşoară în mine cîte o melodie, precisă sau vagă, secondînd un anume gînd, o anume întîmplare, aşa cum a fost şi în după amiaza aceasta. Deodată, pe cînd colegul meu desena lunulele lui Hipocrate pe tablă, în minte mi-a sunat o melodie, timidă la început, apoi tot mai insinuantă... Era o melodie cunoscută şi totuşi... care? Acum ştiu, era *refrenul din poemul Vltava* al domnului Bedriich Smetana care a fost directorul Societăţii noastre filarmonice şi şef de orchestră... acum însă e bolnav. Acest concert l-am ascultat de cîteva ori, pe cînd domnia sa mai dirija...

Se făcuse linişte, colegii îl priveau curioşi şi nu le venea să creadă că atîta sensibilitate se ascundea în dosul ochilor acelora albaştri-cenuşii, care priveau uneori în gol, alteori străluceau cu ironie...

— Aşadar, tu stabileai o *corespondenţă biunivocă* între poemul Vltavei şi povestea numărului π iar noi credeam că ai de gînd să adormi ! *peccavi* ! *peccavi* ! a rostit unul dintre meseni care tăcuse pînă atunci. Toţi au început să rîdă şi astfel nuanţa de stinghereală ce se crease pentru o clipă a fost uitată, şi voioşia a reintrat în sufletele lor.

— În definitiv — a spus un altul adresîndu-se tot cehului, — tu tot nu ai contribuit cu materie cenuşie la simpozionul nostru, ai de unde să o cheltuieşti aici, vorbindu-ne ceva despre acest poem. Cine ştie? Pînă la urmă...

— Cu mare bucurie, — a răspuns acesta însufleţit. Poemul este descrierea cursului rîului Vltava, de la izvoarele lui pînă se varsă în Elba şi e compus în formă de rondo. Melodia despre care v-am vorbit este tocmai refrenul care personifică rîul şi se repetă după fiecare cuplet sau motiv ce evocă tablourile pe care le întîlneşti urmînd cursul apei.

— Atunc :s-o auzim şi noi, au cerut toţi colegii în cor.

Cehul a tăcut stingherit. Profesorul Lindemann i-a sărit în ajutor :

— Luaţi-l mai cu binişorul ! Poate că el ar vrea să vă spună mai întîi care-i schema poemului... melodia va veni atunci de la sine, odată cu refrenul ce nu se poate povesti !

Cănile cu bere s-au deşertat şi s-au umplut din nou şi după ce clinchetul s-a domolit, fără să se mai lase rugat, cehul a vorbit din nou :

— În *Introducere*, un izvor al Vltavei dă naştere unui pîrîiaş. Melodia e cam aşa... şi, dintr-o dată, cehul a început să fredoneze melodia, bătînd măsura cu mîinile ridcate deasupra cănii cu bere. Acum apare al doilea pîrîiaş... din ele se naşte Vltava. Iată melodia rîului, melodie în care pîlpîie viaţa apei, cîntată într-un *allegro comodo non agitato*...

Cu gesturi largi, cehul a conturat melodia pe care cu toţii au cerut să le-o repete, sfîrşind prin a o îngîna împreună.

Prinzînd o clipă de tăcere, profesorul Lindemann a vorbit, încercînd să lege introducerea poemului de istoria numărului π :

— Pînă la izvoarele lui π nu a ajuns numeni căci ele se află undeva în codrii de nepătruns ai preistoriei. Dar oamenii, avînd nevoie de el, l-au găsit, afirmînd că lungimea cercului este de trei ori mai mare decît diametrul său.

— Şi mii şi mii de ani, nimeni nu s-a îndoit de acest adevăr, a spus un student, ca şi cum i-ar fi venit rîndul să continue.

— Iar după alte mii de ani, măsurători mai precise au dovedit că lungimea cercului întrece întreitul diametrului. Cu cît? Cu cît? — susură cel de al doilea pîrîiaş, în adînca tăcere a pădurilor necălcate încă de picior de om, a adăugat al treilea, care a prins jocul şi şi-a luat rolul în serios.

Atunci, fără să spună nimic, cehul s-a ridicat în picioare schițînd gestul unui dirijor și cu toții au început să cînte în cor melodia Vltavei, bătînd încet măsura cu cănile de bere în mînă, neluînd aminte nici la chelner, care apăruse lîngă ei cu alte căni pline. Jocul inventat atunci, pusese stăpînire pe toți deopotrivă și doreau să-l continue fără întrerupere.

— Care-i primul cuplet, a întrebat profesorul, după ce chelnerul își îndeplinise misiunea.

— *Vînătoarea în pădure*, a răspuns cehul. Mergînd în vale, rîul străbate o nouă pădure. Oamenii vînează, se aude glasul cornului...

— Vînătoarea în pădure? au repetat tinerii uitîndu-se întrebător unul la altul. Liniștea nu a durat mult căci, studentul ce ținuse primul referat a început cu o voce mai puțin tremurată și înecată decît a avut-o cu cîteva ore mai devreme :

— Ca un glas de corn, venit din adîncul vremii, au străbătut pînă la noi inscripțiile de pe foile de papirus, rămase de acum vreo patru mii de ani... Vînători dibaci, egiptenii nu s-au lăsat pînă n-au prins sălbăticiunea căreia îi adulmecase urma. Puternic trebuie să mai fi răsunat atunci glasurile de corn cînd au aflat că $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$!

— Așa-i, a întărit cu bucurie profesorul. Pătimași vînători căci altfel nu ar fi putut dibui ei această nouă formulă pentru a calcula aria cercului ! În cazul unui pătrat sau dreptunghi, măsura ariei nu-ți dă prea multă bătaie de cap : n-ai decît să-ți alegi un mic pătrat ca unitate de măsură și apoi să vezi de cîte pătrate ai nevoie ca să poți pava întreaga suprafață de măsurat, lăsînd, bineînțeles, la o parte problema incomensurabilității, fiindcă atunci nu avea sens. Dar, în cazul cercului, nu-i deloc așa ! Așezînd pătratele pe suprafața lui, rămîn de jur împrejur niște figuri împrejmuite de arce de cerc. Cum să apreciezi mărimea lor, folosind pătratul ales ca unitate de măsură? Aceste întrebări și răspunsurile găsite au lărgit matca pîrîului π, deși păstra încă destulă limpezime ca să se zărească pietricelele de pe fund.

Cînd profesorul a tăcut, refrenul Vltavei a izbucnit de la sine, mai puternic și cu mai multă încredere, unii dintre ei legănîndu-se cu cănile în mînă, în ritmul cîntecului. Chiar și profesorul a început să fredoneze, uitînd că nu se

putea mîndri cu vocea lui. Ridicîndu-se grav, cehul a anunţat : *Nunta ţărănească*, apoi s-a aşezat fără să mai spună ceva.

— De data aceasta ne îneacă Vltava — a zis unul îngrijorat.

— Nu se poate, trebuie să existe o modalitate de salvare, a ripostat altul.

— Atunci să lansăm un apel către domnul profesor — a spus al treilea, în timp ce ochii tuturor s-au îndreptat înspre acesta, privindu-l cu totul altfel decît în sala de curs.

Cîteva clipe Lindemann a tăcut, topindu-se în privirile acelea tinereşti, copleşite de plăcere, de pe care se ştersese şi încruntarea sprîncenelor şi pîlpîitul tremurat al pleoapelor pe care-l cunoştea atît de bine de la orele de seminar. A aprins o ţigară, a pufăit de cîteva ori, a tuşit şi apoi le-a vorbit :

— După vreo mie de ani, pîrîul π a ajuns în ţara însorită şi plină de cînt a Eladei. Grecii, avînd la îndemînă rezultatele strînse de egipteni şi babilonieni, nu se mai mulţumeau *să ştie cum*, ci se întrebau curioşi, *de ce*? Aşa au pus ei la temelia cercetărilor matematice demonstraţia, făcînd din fiecare raţionament matematic un prilej de încîntare. Problema cuadraturii cercului nu mai încreţea frunţile geometrilor. Ea era ca o fată frumoasă la care flăcăii cu cele mai sprintene şi pasionate minţi din ţară veneau în peţit. Şi ei nu se prezentau cu mîna goală, unii îi aduceau în dar *cuadratura lunulelor*, alţii *poligoanele înscrise şi circumscrise în cerc*, alţii *curbele cuadratrice*, alţii numerele ciclice... Chipeşul Arhimede i-a oferit cercei în *spirală*, o broşă făcută dintr-un *segment de parabolă* şi o salbă făcută din bani de aur, *trei mari şi patrusprezece mici*...

Se pare că nici mîndrul Apollonius nu a stat deoparte, dar darurile lui au fost aduse în ascuns şi nimeni nu le mai ştie cum erau... Tinerii petreceau împreună, ca la o nuntă, şi fiecare spera că el va fi cel ales... Astfel, pîrîul π s-a transformat într-un rîu falnic şi impetuos, cu apele înspumate de bănuiala că el ar putea fi un număr deosebit de cele raţionale şi de faptul că ducea în valurile lui primele două zecimale exacte...

De data aceasta, cîntecul Vltavei a răsunat îndelung şi din vocile cu o nuanţă răguşită se desprindea parcă satisfacţia de a fi învins o grea încercare. Curînd însă, îngrijo-

rarea a apărut pe chipul unuia care a pus, în șoaptă, întrebarea : — Ce vine acum? Ce vine?

— *Clar de lună. Jocul rusalcelor* ! — s-a auzit prompt răspunsul.

— Pe valea timpului, într-un amurg de primăvară, — a început, după o scurtă tăcere, studentul ce ținuse al doilea referat — rîul reflecta umbrele încîlcite ale veacurilor de prefaceri din evul mediu. Atunci, împărații mînuiau cu dexteritate sabia dar nu știau să țină condeiul în mînă și cînd aveau de iscălit vreun pact, treceau doar c-o pensulă muiată în cerneală peste un șablon ce conținea semnătura. Dar tot atunci, geometria greacă, păstrată doar în manuscrisele arabe, începu să fie cunoscută de către oamenii învățați din Europa occidentală și aceste relatări le produceau atîta emoție ca și un clar de lună reflectat de luciul șerpuitor al apei. Nu-i de mirare ca într-o asemenea lumină fantastică să vezi *rusalce* apărînd în valuri și să te lași ademenit de jocul lor pînă îți fură mințile...

— Bravo ! bravo ! — a aplaudat Lindemann surprins! Nici nu se putea găsi o comparație mai potrivită ca între pasiunea nestăvilită pentru cuadratura cercului și ademenirea rusalcelor ! Rațiunea nu ar putea explica ce l-a îndemnat pe un Scaliger, sau un Hobbes să caute cuadratura cercului !

— Sau pe un Longomontanus, care fiind astronom era mai documentat în probleme de matematică — și-a dat cu părerea un student ce citise despre această problemă chiar în istoria matematicilor scrisă de Montucla.

— Refrenul, băieți ! — a îndemnat cehul și toți l-au ascultat.

— Dar ce ne facem acum, bătrîne, dacă poemul tău nu se sfîrșește aici? — l-au întrebat colegii cînd au isprăvit de cîntat. Ca să-i necăjească, cel întrebat tăcea, privindu-i enigmatic. Din capul mesei, profesorul urmărea jocul zîmbind mulțumit.

— Hai, spune o dată, de ce ne lași să așteptăm?

— Urmează *Coda*, a răspuns cehul.

— Și care-i acest ultim motiv? — a întrebat Lindemann.

— *Vysehradul*, domnule profesor. Renumitul nostru castel din Praga. Se aude zgomot de săbii, după care urmează liniștirea.

— Vyschradul?... Cetate de cucerit? a întrebat cutezător un student care pînă acum nu-și încercase talentul și a continuat cu bărbăție: Purtînd rezultatele stabilite pînă acum, valurile rîului π izbesc la porți de cetate asediată. E luptă grea și loviturile de spadă sînt în toi. Vor învinge cuadraturiștii sau ceilalți? Izbînda se va hotărî abia după ce se va ști ce fel de număr este π, *irațional algebric* sau *irațional transcendent*? Dar iată că pe zidurile cetății fîlfîie steagul învingătorilor, purtînd pe el anul 1882. Este anul nostru, anul în care s-a dovedit transcendența numărului π. Cuadraturiștii sînt învinși iar rîul π își varsă liniștit apele în marele fluviu al numerelor transcendente...

Refrenul s-a mai cîntat odată, duios, ca un *Lied*, fiindcă toți îl îndrăgiseră și fiindcă simțeau că în curînd se vor trezi din visare, că timpul va reintra în drepturile lui firești. Și aceasta s-a întîmplat curînd, atunci cînd profesorul s-a ridicat de la masă. Studenții l-au petrecut pînă acasă, vorbind și fredonînd. La despărțire, luîndu-și rămas bun, profesorul Lindemann a urat fiecăruia noroc pentru *ziua care începe*.

XV

ZIUA CARE ÎNCEPE

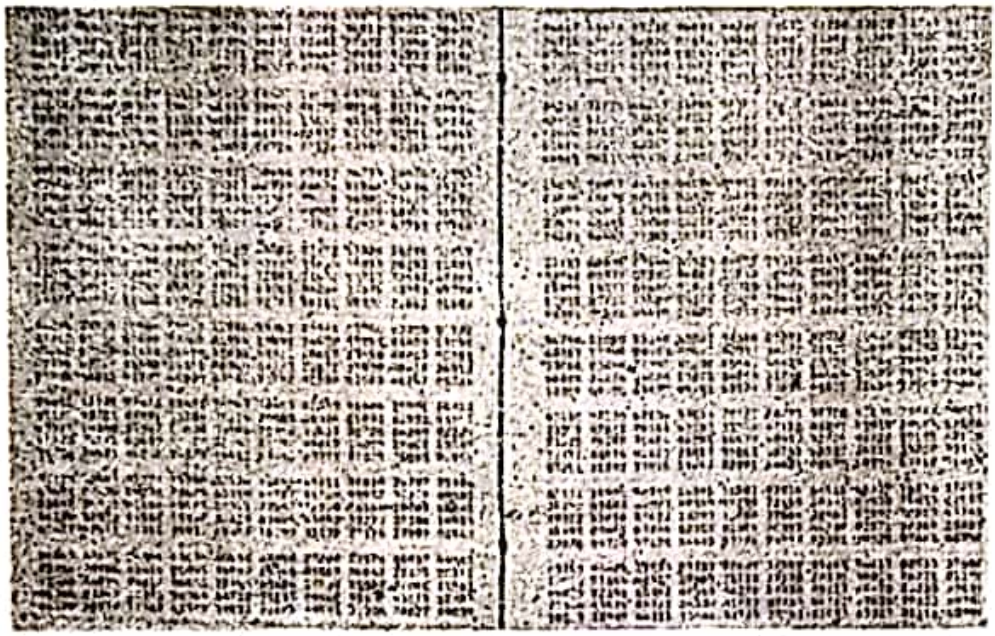
„Matematica consistă nu numai din păstrarea și îmbogățirea unui patrimoniu cu rezultate și metode, ci încă și din decantarea lor prin revenire și neîncetată reorganizare, astfel ca, în fața mulțimii mereu crescînde a problemelor noi, patrimoniul să fie ușor de mînuit".

Georges Bouligand

Acum, dragă cititorule, după ce te-am dus și la berărie, cred că a venit vremea să ne despărțim ! Numai că, drept să-ți spun, îmi vine cam greu să te părăsesc așa, dintr-o dată, deși cred că, după părerea ta, n-aș mai avea ce să adaug fiindcă prin demonstrarea transcendenței numărului π, s-a încheiat această frămîntată poveste a numărului cu chip de literă grecească.

Ce-i drept, din 1882, demonstrația lui Lindemann stă la pîndă, ca și balaurul din poveste, aruncînd limbi de foc peste toți acei ce ar mai încerca să descopere comoara cuadraturii cercului, fiind gata să înghită pe orice nou cuadraturist. Dar dacă îți închipui că, după 1882, numărul π a rămas numai ca o floare presată între filele unui album de amintiri, fie el și matematic, și că, în ciuda faptului că s-a spus totul despre el, el nu mai exercită și acum o anumită fascinație, te-aș întreba : cum îți explici apariția celor 10 000 de zecimale, calculate *după* ce au trecut 76 de ani de la demonstrația transcendenței lui de către Lindemann? Și dacă îmi vei răspunde, îngăduitor, că aceasta a fost doar *o toană*, o curiozitate de a compara puterea mașinii electronice de calcul cu a omului înarmat numai cu un creion și o tabelă de logaritmi, atunci te-aș întreba : ce zici și despre *toanele* celorlalți calculatori ce i-au urmat acestuia, oprindu-ne, de pildă, *la isprava* din 1967, a acelor calculatori din Paris care au urmărit succesiunea zecimalelor lui π pînă la cea de a 500 000-a? Cît loc ocupă acest maldăr de cifre o poți afla ușor prin regula de trei : *dacă 10 000 de cifre sînt cuprinse în 5 pa-*

gini atunci 500 000 se găsesc în $5 \cdot 50 = 250$ de pagini! Ce i-a îndemnat oare la această muncă ce nu avea nici cel mai mic scop practic și nici măcar nu le oferea iluzia satisfacției unui poet sau a unui muzician? Fiindcă nu prea văd cine ar sta neclintit, vreo lună de zile, ca să citească,



Primele 4 000 zecimale ale lui π,
după revista „Chiffres"

sau să transcrie, așa, din plăcere, cîte 6 pînă la 8 ore pe zi toate cele o jumătate de milion de zecimale ale lui π, cum o fac atîția, din pură plăcere, citind versuri sau transcriind partitura vreunei creații muzicale? Trebuie să admiți și tu, cititorule, că numărul π are el un farmec al lui, prin care a atras și îi atrage încă pe unii dintre oameni, făcîndu-i să-i dedice tot timpul lor liber, odinioară căutîndu-i zecimalele cu creionul iar acum cu mașina electronică, întocmai după cum alții cîntă la vioară sau violoncel, la flaut sau trombon, joacă șah sau tenis, ca să-ți amintesc la întîmplare numai cîteva dintre multele pasiuni omenești. Și tot din pasiune pentru π au fost compuse și acele poezioare ce se întîlnesc în mai toate geometriile de școală, în toate țările, ca să se țină minte 10, 20 și chiar 30 de zecimale ale celebrului număr π, ca de pildă aceasta:

„Așa o lume o spune:
Progresul și elanul spori

Cel antic geometru Arhimede,
Arătînd socoteala lui pi
Din raportul cerc birază".

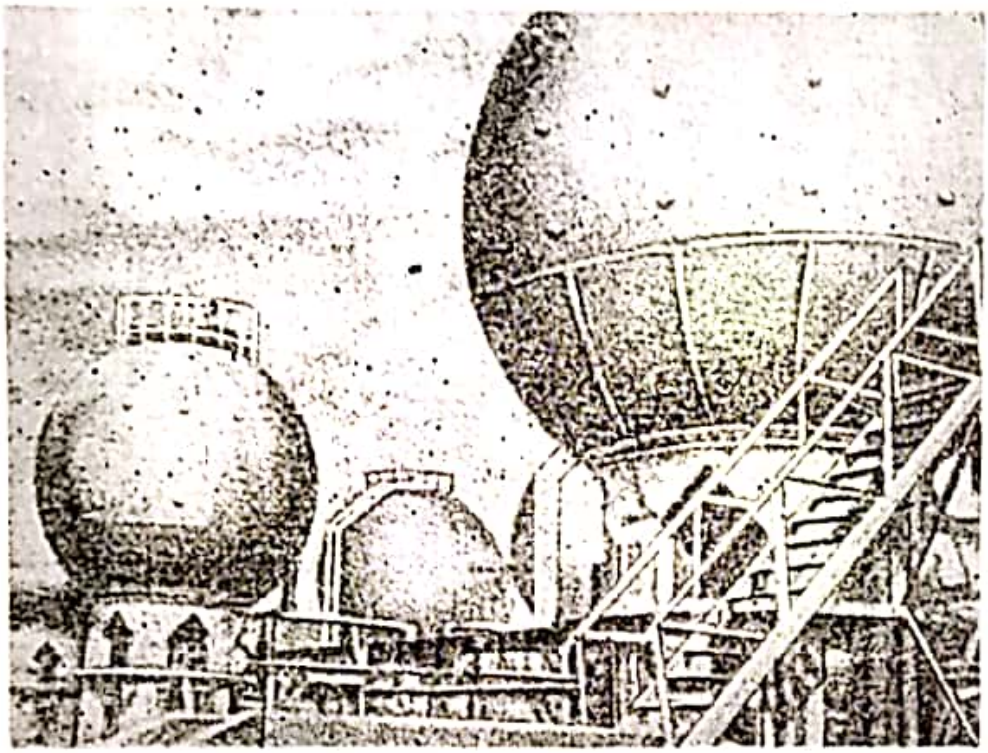
Înlocuind fiecare cuvînt cu numărul literelor din care este compus, se obţin primele 20 de zecimale ale numărului, anume:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846.$$

Care elev va aplica vreodată, în vreun calcul, 20 de zecimale ale lui π? Nici unul, dar multor elevi le-a plăcut să ştie aceste cifre pe de rost şi nu numai la noi, ci şi în alte ţări, după cum te poţi încredinţa, citind nota 205.

Vezi dar că numărul π nu a ajuns piesă de arhivă, ci se împleteşte cu viaţa noastră sufletească, sentimentală dacă vrei, şi totodată cu viaţa noastră practică. Vrei poate să-l căutăm *„în exerciţiul funcţiunii"*? Am putea-o face cercetînd grămezile de proiecte executate de maşinile electronice, în vederea zborurilor cosmonauţilor sau a lansării navelor cosmice către Marte, Jupiter şi alte planete. Tot peste el am da, la orice prelucrare precisă de piese circulare, cilindrice, sferice sau conice, şi unde nu întîlnim asemenea piese? Uite, ce-ar fi de exemplu, să poposim la *hidrocentrala de la Bicaz*, aşa după cum, la începutul cunoştinţei noastre, am poposit lîngă *marea piramidă a lui Kheops*, privită de popoarele antichităţii ca una dintre cele şapte minuni ale lumii? Să nu crezi că am ales întîmplător acest loc, dintre atîtea altele din ţara noastră, la fel de impunătoare prin realizările înfăptuite acolo, ci fiindcă aceste două opere grandioase rivalizează între ele, în unele privinţe: *Hidrocentrala de la Bicaz* a necesitat 1 650 000 m^3 de beton, *piramida lui Kheops* 1 300 000 m^3 de piatră, acolo au muncit timp de 25 sau 30 de ani, vreo 100 000 de sclavi, la noi numai 1 000 de oameni liberi, conştienţi de valoarea muncii lor au turnat în 5 ani betonul iar muncile grele au fost executate de maşini. Ei bine, din fiecare roată dinţată, angrenată la altă roată, din fiecare bucşă sau cilindru pe care alunecă o curea de transmisie, numărul π îşi semnalează discret prezenţa, în ritmul armonios al motoarelor. El şi-a spus cuvîntul şi atunci cînd *s-a construit acolo tunelul barajului*, cu o secţiune circulară de 7 m diametru, prin care apa poate atinge o presiune de 7 atmosfere şi cînd *s-a proiectat castelul de echilibru*, cu a cărui realizare se mîndreşte

uzina din Bicaz. Acest castel de echilibru, așezat la capătul tunelului de aducțiune, de la care începe a coborî conducta forțată, este *un puț cilindric de 70 m adîncime avînd o secțiune circulară de 23 m în diametru*, continuat la suprafață de un *alt cilindru cu pereții de beton și avînd un diametru interior de 33 m*. Or, toate calculele volumelor, ariilor



Rezervoarele sferice
din orașul Gh. Gheorghiu-Dej

laterale și totale, prin care s-a stabilit cantitatea de fier sau de ciment necesară la turnarea betonului armat, sau a cantității de scînduri de la cofraje, au cerut ajutorul numărului π. Și, fiindcă a venit vorba de ciment, crezi oare că numărul π lipsește de la vreuna din fabricile noastre care-l macină și îl toarnă în saci? Ascultă-l cît zgomot mai face în strașnicele cuptoare rotative, proiectate și construite de inginerii noștri! Sau, dacă am pornit-o pe urma sacilor de ciment și am ajunge odată cu ei în fața șugubeților *cofraje glisante* care economisesc atîta material lemnos și atîta timp de lucru, ți-ar surîde satisfăcut dintre cele două suprafețe cilindrice coaxiale, între care se toarnă betonul armat sau de pe podina circulară interioară. Ori, poate că te-ar atrage *mulțimea rezervoarelor sferice* care se ridică în aer, ca o întruchipare minunată a viselor tale de copil cînd ridicai cîte un balon și-l țineai

strîns de sfoară ca nu cumva să-l pierzi, în timp ce-l priveai și ți-l închipuiai de dimensiuni fantastice? Știi probabil că în orașul Gh. Gheorghiu-Dej au fost înălțate primele rezervoare sferice pentru depozitarea butanului de la combinatul de cauciuc sintetic de acolo, avînd fiecare o capacitate de cîte 600 m^3, forma sferică fiind aleasă pentru că, dintre toate corpurile care au aceeași suprafață totală, sfera este aceea cu cel mai mare volum?

De-abia acum, cînd te-am prevenit că numărul π se ascunde cu aceeași iscusință, în cea mai mică rotiță ca și în cel mai gigantic combinat, îmi pot lua rămas bun de la tine, dragă cititorule, rostind, ca salut de despărțire, vorbele învățate în copilărie de la Ion Creangă: „și-am încălecat pe-o roată și ți-am spus povestea toată".

1. Mircea Maliţa: *Idei în mers*, Editura Albatros, Bucureşti, 1975, p. 30, citat din articolul „Profanii disecă ştiinţa" apărut în revista *Impact*.

2. Georges Rombi: *Dimensions de la science*, Hachette, Paris, 1973, p. 3.

3. În domeniul matematicilor se cunosc multe numere remarcabile, astfel: numărul „e", baza sistemului de logaritmii naturali; numărul „C" sau „constanta lui Euler" care a rămas pînă azi învăluit în „mister", fiindcă nu se ştie dacă este transcendent sau nu; numărul „i", unitatea imaginară ş.a.

4. Ivar Lissner: *Culturi enigmatice*, Editura Meridiane, Bucureşti, 1972, p. 15.

5. Paul Mazon: *Homère, Iliade*, XVIII, 503/504, Paris, 1938.

6. O. Neugebauer şi W. Struve: *Uber die Geometrie des Kreises in Babilonien, Quellen und Studien zur Gesch. Math. Abt. B.*, vol. I, 1931, p. 85.

7. Dintre textele matematice egiptene, cele mai complete şi mai bine studiate sînt:

   a). Papirusul Rhind: A. B. Chance: *The Rhind Mathematical Papyrus*, vol. I, 1927, vol. II, 1929.

   b). Papirusul din Moscova: W. W. Struve: *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museum der schönen Künste in Moskau.*
   Quellen und Studien zur Gesch. Math. Abt. A, Bd. I, 1930. Atît papirusul Rhind cît şi cel din Moscova, par a fi fost scrise în timpul imperiului mijlociu, între anii 2 000 şi 1 800 î.e.n. Cel dintîi este o copie făcută pe la 1 600 î.e.n. de către scribul Ahmosé, după o scriere mai veche.

8. În legătură cu matematicile babiloniene, sînt de menţionat însă şi rezultatele stabilite de prof. E. M. Bruins, bazate pe descifrarea textelor descoperite în 1930 la Suza, fosta capitală a Elamului. E. M. Bruins: *Quelques textes mathém. de la mission de Suze*, Proc. Ac. Amsterdam, 1950.

9. Informaţiile despre istoria Egiptului şi a Babilonului au fost luate din: A. Erdmann: *L'Egypte des pharaons*, Paris, 1939.
Istoria universală (în 10 volume), Vol. I, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1959.
V. C. Avidiev: *Istoria Orientului antic*, Editura de Stat, Bucureşti, 1951.
Numele *Imhotep* apare în istoria imperiului vechi. El a fost purtat de către unul dintre învăţaţii Egiptului.

10. *Mina* reprezintă o măsură de greutate folosită în Egipt şi Babilon. Era aproximativ egală cu 0,504 kg.

11. *Iliduri* este un nume propriu, întîlnit în istoria babilonienilor.

12. *Ptah-Hotep* a fost un demnitar de seamă din timpul imperiului vechi. Scrierile lui formau obiect de studiu în şcolile de scribi iar maximele lui erau mereu repetate de către foşti elevi din timpul Imperiului mijlociu şi chiar de mai tîrziu.

18. În problema 48 din papirusul Rhind (loc. cit. 7 a, vol. I) se cere să se compare aria cercului de diametru 9 cu a pătratului circumscris lui, iar în problema 50 se calculează aria cercului de diametru 9.

14. Figura de la problema 48 din papirusul Rhind (loc. cit. 7 a, vol. I) şi redată aici (fig. 14) este la fel cu figura 1 a, dacă se face abstracţie de cerc. Babilonienii înlocuiau lungimea cercului prin perimetrul hexagonului regulat înscris în cerc. În adevăr, considerînd $L_c = 6r$ rezultă $\pi = 3$. Atragem atenţia cititorilor că, atît la egipteni şi babilonieni, cît şi mai tîrziu la greci, cuvîntul cerc era folosit cu înţeles de aria cuprinsă de linia cercului şi nu însăşi linia aşa cum îl folosim noi azi. Reminiscenţe ale acestei concepţii se găsesc în cărţile vechi în care se folosesc termenii: *periferia cercului* sau *lungimea circumferinţei*.

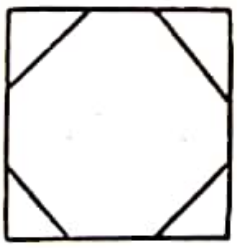


Fig. 14

15. Începînd cu anul 2 000 î.e.n., școala sumeriană, și în continuare cea babiloniană, a căpătat o largă dezvoltare, avînd un mare număr de elevi ce deveneau scribii necesari a fi încadrați în diferitele instituții ale statului. Directorul școlii, — specialistul —, purta numele de părintele școlii și elevii erau numiți fiii școlii (S. N. Kramer: *Istoria începe de la Sumer*, Editura Științifică, București, 1962, p. 68).

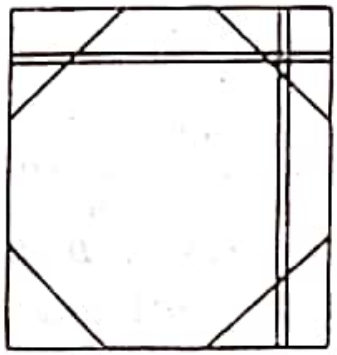
16. Aceasta este chiar problema 50, transcrisă întocmai prin papirusul Rhind (planșa 72).

17. Din cele spuse de Imhotep, rezultă că latura noului pătrat (fig. 15) are ca lungime 9 khet — 1 khet — $\frac{1}{9}$ 8 khet. Dacă se ia ca unitate de lungime latura pătratului circumscris, acest calcul se mai poate pune sub forma:

$$1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9} - \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

Așadar, perimetrul noului pătrat, respectiv lungimea cercului, este

Fig. 15



de $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Considerînd diametrul drept unitate ($d = 1$), rezultă $L_c = \pi$ și deci $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \simeq 8{,}16$. Acest calcul se găsește în problema 10 din papirusul de la Moscova. Înainte de a enunța această problemă, vrem să amintim că egiptenii nu scriau numerele în sistemul pozițional, ci numerele întregi, prin alăturarea semnelor specifice fiecărui ordin zecimal, iar cele zecimale numai sub formă de fracții. În privința fracțiilor, ele se deosebeau de notația actuală prin faptul că erau considerate numai fracțiile cu numărătorul 1, pentru care aveau semne speciale. Celelalte fracții erau transformate într-o sumă de fracții cu numărătorul 1 (fracții alicote). În papirusul Rhind se află o tabelă de transformare a fracțiilor cu numărătorul 1 de forma $\frac{1}{2n+1}$

(unde $n = 2, 3, \ldots, 49$) în fracţii de forma:
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ şi $\frac{3}{4}$, considerate drept fundamentale. Cînd era de adunat, fracţiile erau întîi transformate în fracţii fundamentale şi apoi scrise unele după altele, fiindcă pentru adunare nu exista nici un semn. Şi acum, iată problema 10, aşa cum este ea formulată în papirusul din Moscova:
„Socoteala unui coş, cînd ţi se spune că un coş are o lărgime la gură de $4\frac{1}{2}$. Fă-mă să cunosc aria lui.

Socoteşte $\frac{1}{9}$ din 9, pentru că un coş este jumătate dintr-un ou. Rezultă

1. Calculează restul care este 8. Ia $\frac{1}{9}$ din 8. Acum socoteşte restul din acest 8 şi $\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{18}$. Fac $7\frac{1}{9}$. Socoteşte $7\frac{1}{9}$ de $4\frac{1}{2}$ ori fac 32. Iată, aceasta este aria" (loc. cit. 7 b) şi
Florica T. Câmpan: *Papirusul din Moscova şi matematicile vechilor egipteni*, Rev. şt. V. Adamachi, vol. XXXIV, nr. 3, 1948.

18. Şcoala pentru scribi era situată, la început, chiar în curtea faraonului. Ea se numea „Casa vieţii".

19. Cuvintele tatălui redau, în parte, convorbirea dintre Kheti, fiul lui Duaf, înţelept de la începutul Imperiului mijlociu, şi propriul lui fiu, avută cu el pe cînd îl conducea la şcoala de scribi. Aceasta este tradusă în întregime de A. Erdmann în *Die Literatur des Aegypter*, p. 100.

20. Dialogul se continuă astfel: „Funcţia de scrib este mare. Uneltele de scris şi sulul de papirus îi aduc bucurie şi avere. Nici un scrib nu moare de foame, că doar nu degeaba se zice că învăţatul se satură din învăţătura lui ... (loc. cit. 19)".

21. Problemele corecte cuprinse în papirusul din Moscova se termină cu expresia „Ai socotit bine". Se pare că observaţia era adăugată de profesor atunci cînd controla temele.

22. Muhammed ibn Ahmed abu-r- Raihan, al-Biruni (973—1048), cunoscut mai ales sub numele de Al-Biruni, a fost unul dintre cei mai renumiţi savanţi enciclopedişti din Horezmul medieval şi a scris multe lucrări de matematici, ştiinţă şi călătorii. E bine cunoscută călătoria sa în India, observaţiile culese cu acest prilej fiind consemnate în *Cronica Indiei*.
H. Suter: *Die math. der Araber und ihre Werte*, Abh. Gesch. Math. X, 1900.

23. Prefaţa la cartea lui Al-Biruni *Despre găstrea coardelor în cerc.*

24. Tales din Milet (624—546 î.e.n.) a fost declarat, în anul 582, ca unul dintre cei 7 înțelepți ai Greciei. Geniul lui i-a dat posibilitatea să se manifeste cu succes în ramurile cele mai variate ale activității omenești: inginer, astronom, matematician, filozof, conducător al treburilor statului, negustor etc. Este primul matematician reprezentant al gîndirii materialiste din Grecia antică, întemeietorul școlii materialiste din Milet. După Plutarh, Tales a adoptat ipoteza susținută de egipteni că „apa este cauza primă și principiul tuturor lucrurilor". Aceasta ne arată că germenii concepțiilor ateiste și materialiste spontane ale egiptenilor și babilonienilor au exercitat o influență fecundă asupra dezvoltării ulterioare a științei și gîndirii materialiste din lumea antică, ce încearcă să explice fenomenele naturii pe baza unui principiu material unic, în acest caz, apa. Ca *inginer*, se spune că a ridicat un zăgaz strategic prin care a schimbat cursul unui riu, făcînd un vad pe unde a putut trece armata lui Cresus și apoi, readucînd apa la vechiul curs, i-a nimicit-o. Ca *astronom*, faima lui Tales s-a păstrat de-a lungul veacurilor, prin precizia cu care a prezis eclipsa de soare din 28 mai 585 î.e.n. În legătură cu această îndeletnicire a rămas și anecdota următoare: Într-o seară, pe cînd Tales se plimba îngîndurat privind spre stele, a căzut într-o groapă. Fiind văzut de o femeie mai în vîrstă, aceasta l-a întrebat: — Cum poți să știi ce se află în cer, cînd nu știi ce se află lîngă picioarele tale? Ca *matematician*, Tales a stîrnit admirația faraonului Amasis, arătînd cum se poate calcula înălțimea piramidei folosind umbra pe care o aruncă un băț de lungime cunoscută, înfipt la marginea umbrei lăsată de piramidă. Tot el a mai stabilit că suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte, că unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sînt egale, că toate unghiurile drepte se pot înscrie într-un semicerc etc. Dar, adevărata importanță de *geometru* a lui Tales nu constă atît în adevărurile matematice descoperite de el, cît în faptul că el este *primul matematician care a enunțat o teoremă însoțită de demonstrarea ei*. Nefiind încă stabilite axiomele geometriei, el a dedus pe cale logică adevărurile geometrice folosind evidența și observația (de pildă, simetria). Metoda inaugurată de el a fost apoi transmisă, prin elevii lui, în toate școlile grecești. Ca *filozof*, Tales este primul care a privit diversitatea lumii ca expresia unității ei, aceasta exprimîndu-se prin apă, izvor prim și substanță a tuturor lucrurilor din natură. Se spune că, întrebat fiind, care este conduita cea mai bună și dreaptă, a răspuns: „Abținerea de a face ceea ce critici la alții". În calitate de *conducător al statului*, a sfătuit pe cetățeni să-și unească toate orașele din Ionia într-o federație, cu capitala în Teos. Ca *negustor*, Tales a ajuns în Egipt. Asupra acestei ocupații se povestesc multe anecdote. De pildă, că, transportînd o dată sare pe spatele

măgarilor, unul dintre ei a alunecat în apă şi o parte din sare dizolvîndu-se, sarcina măgarului a devenit mai uşoară. Cînd a fost să treacă un al doilea pîrîu, Tales a observat că de data aceasta măgarul s-a dus singur să se scufunde în apă. Înţelegînd că măgarul a sesizat cauza, ca să-l dezveţe, i-a schimbat încărcătura şi i-a pus în spate bureţi.

a) T. Heath: *A history of Greek Mathematics*, Vol. I., Oxford, 1921, p. 67.

b) T. Heath: *A manual of Greek Mathematics*, Oxford, 1931, p. 81.

c) W. W. Rouse Ball: *Histoire des mathématiques*, T. I. Paris, 1927. p. 14.

25. Secolul al V-lea î.e.n. se caracterizează printr-o luptă viguroasă între materialism şi idealism. Ambele curente filozofice au avut reprezentanţi în şcolile matematice greceşti. Astfel, după şcoala ioniană, condusă de Tales din Milet, şi şcoala lui Pitagora din Croton, începînd cu secolul al V-lea î.e.n. s-au înfiinţat multe alte şcoli matematice importante. În *Tracia* exista şcoala atomistică, înfiinţată de Leucip. Matematicianul cel mai celebru al acestei şcoli a fost filozoful materialist Democrit din Abdera (460—370 î.e.n.). El a adoptat teoria lui Leucip, îmbogăţind-o cu principiul mişcării materiei. „Atomii se găsesc într-o veşnică mişcare" spunea el. Cît priveşte noţiunea de număr, spre deosebire de şcoala lui Pitagora, Democrit i-a dat o interpretare materialistă, afirmînd că numărul serveşte la cuprinderea realităţii obiective. Un alt centru se afla în *Chios*, — şcoala astronomică de acolo fiind condusă de Oenopide. În *Eleea* exista şcoala idealistă a sofiştilor, creată de Xenofan (565—475 î.e.n.) şi continuată de Parmenide şi Zenon. Ea a rămas celebră prin problemele paradoxale[1] pe care le-a formulat Zenon (495—435 î.e.n.). Dintre paradoxele lui Zenon, amintim de „săgeata care zboară rămînînd pe loc" şi „Ahile şi broasca ţestoasă". În primul paradox, considerînd spaţiul şi timpul ca formate din elemente indivizibile, Zenon afirmă că, deşi săgeata este în mişcare, ea rămîne pe loc, fiindcă timpul, — fiind format din clipe indivizibile — în clipa în care privim săgeata ea nu se poate mişca întrucît, dacă şi-ar schimba poziţia, ar însemna că acea clipă *indivizibilă* s-ar divide. Pe de altă parte, dacă săgeata era în repaus, ea rămîne mereu în repaus, căci timpul este format din asemenea clipe. În paradoxul broaştei ţestoase, Zenon pretindea că Ahile, deşi aleargă de zece ori mai repede decît broasca ţestoasă, care se află înaintea lui cu 1 000 de stadii, nu o va putea ajunge căci, în timp ce Ahile parcurge cele 1 000 de stadii,

[1] Aceste probleme se referă la seriile infinite ce se obţin dacă se admite că anumite mărimi matematice — în particular spaţiul şi timpul — se pot împărţi la infinit şi sînt puse în legătură cu mărimile incomensurabile descoperite de pitagoricieni.

broasca a înaintat cu alte 100 de stadii, şi mai departe, cînd Ahile a parcurs 100 de stadii broasca a parcurs alte 10 stadii, ş.a.m.d., de fiecare dată rămînînd o diferenţă de drum între el şi broască, diferenţă ce nu poate fi parcursă, în ipoteza că spaţiul se divide la infinit ! Se ştie că Zenon comitea greşeala fundamentală de a atribui un caracter absolut discontinuităţii mişcării şi timpului, ignorînd continuitatea lor. Către sfîrşitul veacului al V-lea, Atena a devenit centrul în jurul căruia s-au grupat matematicienii greci. Printre filozofii cei mai renumiţi care deschid acolo şcoli, se aflau materialistul Anaxagora din Clazomene, Hippias, Antifon, Hipocrat din Chios ş.a.

26. Aristofan, părintele comediei antice, a debutat în 427 î.e.n. cu comedia *Norii*.

27. Aristotel (384—322 î.e.n.) a fost elevul lui Platon dar a oscilat între materialism şi idealism. El a fondat la Atena şcoala sa, numită *Lykeion* (liceul), după modelul *Academiei* lui Platon. Numirea provine de la grădina din jurul templului consacrat zeului Appolon Lykeion unde filozoful îşi ţinea cursurile. Din cauză că, de cele mai multe ori, lecţiile erau ţinute în timp ce se plimba cu elevii prin grădină, aristotelicii au căpătat porecla de *peripatetici* (de la *peripatos* = *promenadă*).
Louis Figuier : Vie des savants, vol. I, Paris, 1872, p. 137.
Dumitru Isac : *Aristotel*, Colecţia Oameni de seamă, Editura Tineretului, Bucureşti, 1959.

28. Eudem din Rhodos a fost unul dintre elevii cei mai de seamă ai lui Aristotel. Despre viaţa lui nu se ştie nimic. Fragmentele rămase din lucrările sale au fost publicate în 1870 şi printre ele se află o parte din istoria geometriei. O altă parte din această istorie, scrisă de el, se cunoaşte în mod indirect, din comentariile lui Proclus, Eutocius şi Simplicius.
F. Rudio : *Die Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippocrates*, Biblioteca Mathematica, v. III (3), 1902, p. 27.

29. În liceul lui Aristotel erau două *promenade* (lecţii) pe zi. Dimineaţa avea loc *lecţia acromatică*, destinată elevilor înaintaţi şi în ca se expuneau problemele abstracte ale ştiinţelor. Aceste lecţii făceau parte din învăţămîntul *esoteric* (interior sau secret). Lecţia de seară — învăţămîntul *exoteric* (exterior şi public) — era destinată tuturor auditorilor şi trata probleme care nu cereau decît o redusă pregătire ştiinţifică.

30. Cei ce se ocupau cu aflarea cuadraturii cercului, cu rigla şi compasul. Vrem să atragem atenţia că geometrii greci nu foloseau un cuvînt

special pentru a numi mărimea unei suprafeţe închisă de o curbă plană (adică *aria* ei) şi aceasta, pentru că prin numele unei curbe închise ei înţelegeau chiar spaţiul închis de acea curbă. Astfel, prin cerc ei nu înţelegeau, ca noi, locul geometric al punctelor egal depărtate de centru, ci suprafaţa mărginită de această curbă. Totuşi, în *Elementele* lui Euclid apare cuvîntul „embadon" cu înţeles de arie. De aici, el a trecut în cărţile lui Heron şi apoi a fost folosit de către *agrimensorii* romani [1]. Aceştia numeau mărimea unei suprafeţe fie „embadum" fie „area", cuvînt care s-a transformat în *arie*. În secolele I şi II î.e.n., calculul ariei unui cîmp era numit „quadratura agrorum". Expresia s-a generalizat, iar azi, prin *cuadratură* se înţelege calcularea ariei închise de o linie curbă sau frîntă.

J. Tropfke : *Geschichte des Elementar Mathematik*, vol. IV, 1923, p. 126.
D. E. Smith : *History of mathematics*, vol. I, 1923, p. 124, vol. II, 1925, p. 364.

31. Leon Brunschvieg : *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, 1922, p. 57.
Platon (427—347 î.e.n.), filozof idealist, a fost elevul şi prietenul lui Socrate. După moartea acestuia a călătorit mult. Matematicile le-a învăţat la Cyrene, cu Theodorus. Întorcîndu-se la Atena, a deschis *Academia* (389 î.e.n.), pe frontispiciul căreia se spune că a scris : „Nimeni nu intră aici dacă nu-i geometru". Era prieten cu pitagoricienii şi convins că numai prin cunoaşterea matematicilor se poate înţelege filozofia. În *Republica* el a scris : „Studiul matematicilor dezvoltă şi pune în mişcare un organism mintal mai capabil decît 1 000 de ochi, din cauză că numai prin el singur poate fi înţeles adevărul". În *Dialogurile* sale se găseşte prima încercare serioasă de filozofie a matematicii. „Prin teoria ştiinţei ca doctrină a universului şi prin matematismul său, Platon a influenţat gîndirea ştiinţifică ulterioară" (*Mic dicţionar filozofic*, ed. II, Editura Politică, Bucureşti, 1973, p. 439).

32. Aristofan a scris, în anul 427 î.e.n., comedia *Păsările* care a fost jucată la serbările „Marile Dionisii" obţinînd premiul al doilea. Scena cu Meton este următoarea :
„Pisthetairos : O ! Pe Zei ! Dar cine eşti tu ?
Meton : Sînt Meton, cine altul ? Vestit şi în Elada şi în Colonos !
Pisthetairos : Ce scule ai ?
Meton : De măsurat văzduhul... Căci aerul, pe tot cuprinsul lui, ca un cuptor e.

---

[1] Numiţi şi *gromatici*, de la cuvîntul *groma*, care era denumirea unui instrument folosit în agrimensură.

Dacă pui deasupra acestui echer și acest compas...
Pricepi ?

Pisthetairos : De loc.

Meton : Măsor cu linialul drept,
Și cercul meu ajunge un pătrat !"

(Aristofan : *Teatru*, Editura de Stat, București, 1956, p. 173.)

33. Dicaiarh, un elev al lui Aristotel, de care s-a despărțit mai tîrziu. A scris o didascalie despre Aristofan.

34. Platon : 1). Banchetul, traducere de P. Mușoiu, București, 1922, p. 71.
2). Dialoguri : Apologia, p. 121. Traducere de St. Bezdechi, București, 1922.

35. Fiind convins că știința nu poate progresa decît printr-un studiu amănunțit al naturii, Aristotel aduna material științific și îl punea la dispoziția elevilor săi. Calistene era nepotul lui Aristotel, care plecase împreună cu Alexandru cel Mare în India. El trimitea unchiului său multe colecții și tot ce găsea interesant în țările pe care le străbătea. Fiind învinuit de trădare, Alexandru l-a condamnat la moarte și l-a executat. Alexandru fusese și el elevul lui Aristotel. În legătură cu aceasta se povestește că, fiind în Asia și aflînd că Aristotel și-a publicat, la Atena, lucrările sale, i-a scris așa :
„Alexandru către Aristotel, salut. Ai greșit publicînd lecțiile acromatice. Ce superioritate voi mai avea cu față de ceilalți oameni, dacă lucrurile pe care le-am învățat sînt comunicate mulțimii ? Trebuie să știi că vreau să fiu primul în toate, în știință nu mai puțin decît în putere ! Bună ziua !" La această scrisoare, Aristotel a răspuns : „Aristotel către regele Alexandru, salut. Mi-ați scris ca să mă dojeniți fiindcă am publicat lecțiile mele acromatice. Ele sînt, în adevăr, date publicului, dar nu sînt cu adevărat publice, pentru că ele rămîn de neînțeles acelora ce nu au auzit explicațiile mele. Bună ziua". Imediat după moartea lui Alexandru, Aristotel a fost condamnat de atenieni la închisoare, învinuit de ateism. Nefiind cetățean al Atenei a preferat să plece de acolo și s-a stabilit în Eubeea, la Chalcis, locul de naștere al mamei lui, motivîndu-și fuga astfel : „nu trebuie să se arunce pe atenieni rușinea unei noi crime împotriva filozofiei".

36. Aristotel este considerat inventator al dicționarului. După ce și-a strîns materialul documentar pentru cercetare, i-a venit ideea să-l așeze după alfabet. Astfel, el a întocmit prima bibliotecă din lume în care principiul de clasificare al cărților să fie ordinea alfabetică. După exemplul lui au fost organizate și marile biblioteci din Alexandria și Pergam.

37. În *Elementele* lui Euclid nu există nici o problemă de geometrie a cărei soluție să necesite alte instrumente pentru desenarea figurii decît

rigla și compasul. Geometrii idealiști, din școala lui Platon, se opuneau oricărei încercări de a introduce în studiul geometriei probleme mai complicate, care ar fi cerut folosirea unor noțiuni care să depășească pe acelea legate de linia dreaptă și cerc. Totuși, în toate domeniile de activitate practică intervin probleme ale căror soluții cer folosirea altor curbe mai complicate decît linia dreaptă și cercul, cu alte cuvinte, ale căror soluții depind de ecuații algebrice de grad superior lui doi (cerc) sau chiar transcendente. Încercările geometrilor greci progresiști, de a da soluții unor asemenea probleme, i-au condus la descoperirea unor curbe noi, care nu pot fi construite cu rigla și compasul, ci numai prin puncte sau, uneori, cu alte instrumente, speciale. Printre problemele cărora zadarnic li s-a căutat o soluție cu rigla și compasul au rămas celebre următoarele trei:

1) *problema duplicării cubului* sau *problema delică*[1], în care se cere să se afle latura unui cub al cărui volum este de două ori mai mare decît al unui cub dat;

2) *problema trisecției unghiului*, în care se cere să se împartă un unghi în trei părți egale și

3) *problema cuadraturii cercului*, în care se cere să se construiască latura pătratului de arie egală cu a unui cerc dat.

88. Anaxagora din Clazomene (499—428 î.e.n.) a fost învățătorul și prietenul lui Pericle. Filozof grec antic, el s-a manifestat ca un materialist inconsecvent. A fost condamnat la închisoare fiind acuzat de ateism și impietate, fiindcă a susținut că Soarele și Luna nu sînt ființe vii, că Soarele este o piatră mare și fierbinte iar Luna este pămînt ca al nostru și nu are lumină proprie. Se spune că și-ar fi părăsit toată averea numai ca să fie liber să se dedice filozofiei. Fiind întrebat care este scopul vieții lui a răspuns: „Să studiez cerul, natura Soarelui și a Lunii". Eliberat din închisoare, a murit în Lampsac.

89. Aristotel: *Physique*, Tome I et II. Texte établi et traduit par H. Cartaron, Paris, 1926, 185 a, p. 12—20.

40. Hipocrate din Chios (460 (?) î.e.n.), matematician celebru care nu a aparținut nici unei școli. De la el s-a păstrat numai un fragment din geometria pe care a scris-o, fragment care se află într-un comentariu

---

[1] Denumirea aceasta are la origine următoarea legendă: Odată, în Atena bîntuia o ciumă cumplită, care nu se mai potolea. Atunci, a fost consultat oracolul din insula Delos. În răspunsul dat de însuși Apollo, atenienii au fost sfătuiți să dubleze altarul cubic din templul consacrat lui acolo. Atenienii au construit, de îndată, un alt altar, cu muchea de două ori mai mare, dar flagelul nu s-a oprit. Au întrebat din nou oracolul care, drept răspuns, i-a sfătuit „să studieze mai profund geometria". Atunci au înțeles că ei construiseră un altar de 8 ori mai mare și au cerut geometrilor să găsească soluția problemei.

al lui Simplicius (sec. VI e.n.). A trăit la Atena, unde a predat matematicile, cam între anii 450—430 î.e.n. Aristotel îl amintește în „*Etica* lui Eudem".

F. Rudio: *Der Bericht des Simplicius*, Bibl. Math. V (3), 1902, p. 7.

41. Paul Tannery: *Mémoires scientifiques*, vol. I, Paris, 1012: *Hipocrate de Chio et la quadrature des lunules*, p. 46—52 precum și: *Le fragment d'Eudèm sur la quadrature des lunules*, ibid., p. 339.

42. Paul Tannery: *Le fragment d'Eudèm* ... Hipocrate numea pătratul unui segment „un segment în putere" iar propoziția amintită în text era formulată de Hipocrate astfel: „segmentele asemenea în cerc sînt între ele în același raport cu bazele lor în putere". De observat și denumirea de bază, în loc de diametru. Aristotel, ca și Eudem, nu au folosit cuvîntul rază, ci dreapta dusă din centru. Cuvîntul rază apare abia în scrierile lui Cicero.

43. În adevăr, dacă se consideră ca rază a cercului $A\Delta B$, latura $A\Gamma$ (fig. 16) a triunghiului isoscel $A\Gamma B$, atunci avem:

aria seg. $A\Delta B$ = aria sect. AOB — aria triunghiului AOB, sau:

$$\text{aria seg. } A\Delta B = \frac{\pi A\Gamma^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{A\Gamma^2}{2} = \frac{A\Gamma^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

aria. seg. $A\Gamma$ = aria sect. $AI\Gamma$ — aria tr. $AI\Gamma$ =

$$= \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

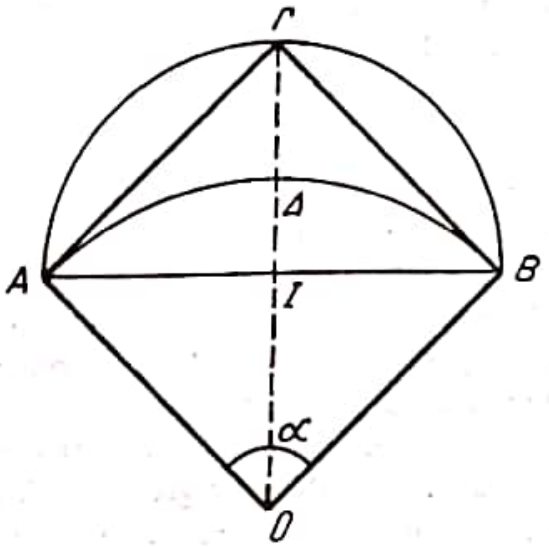


Fig. 16

Dar triunghiul $A\Gamma B$ fiind dreptunghic și isoscel, avem $2A\Gamma^2 = AB^2$.

Așadar, 2 aria seg. $A\Gamma = \frac{AB^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{A\Gamma^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ =

= aria seg. $A\Delta B$.

44. Toate demonstrațiile în legătură cu cuadratura lunulelor pot fi urmărite în cartea lui B.L.Van der Waerden: *Science Awakenning*, Holland, 1954, p. 123 sau în
E. Kolman: *Istoria matematicii în antichitate*, Editura Științifică, 1963, București, p. 100.

45. E vorba de un principiu abstract și fals, azi înlăturat, pe care îl admiteau geometrii greci alături de Aristotel și anume că: segmentele de dreaptă sau de curbă, fiind *continue*, se pot împărți în mod nelimitat fiindcă, dacă s-ar admite teza contrară, atunci s-ar ajunge la *puncte* care sînt indivizibile și în acest caz nu ar mai fi satisfăcută condiția de continuitate. În *Fizică* Aristotel scria: „Este imposibil ca un continuu să fie format din indivizibili, de exemplu, o linie să fie formată din puncte, dacă este adevărat că linia este un continuu și punctul un indivizibil. În adevăr, nu se poate spune că extremitățile punctelor sînt puncte, pentru că pentru indivizibil nu există o extremitate care să fie distinctă de cealaltă"[1]. (Physique: 231 a, 24; 261 b, 29).

46. *Métaphysique d'Aristote*, traducere de Barthélemy Saint-Hilaire, Paris, 1879, cartea a V-a, cap. V.

47. În textul lui Simplicius în care se comentează lecțiile de fizică ale lui Aristotel (*Fizica*, cartea I-a, cap. II) sînt expuse cîteva păreri curioase ale sofiștilor în legătură cu cuadratura cercului. De pildă, ei afirmau posibilitatea cuadraturii cercului aducînd ca argument existența numerelor pătrate și totodată ciclice. Sub acest nume erau încadrate acelea care prin ridicarea la pătrat, păstrau numărul în ultima cifră a pătratului. De exemplu: 25 este un număr pătrat și ciclic (sau circular), fiindcă $5^2 = 25$; tot așa 36 ($6^2 = 36$) spre deosebire de 7 care nu-i ciclic.

48. Aristotel: *Etica nicomahică*: I, VII, 21 b, 8.

49. Hippias din Elis (420 î.e.n.), a fost unul dintre cei mai renumiți sofiști din secolul V î.e.n. Se pare că el a fost primul geometru care s-a ocupat de o linie diferită de dreaptă și cerc. Neputînd să o construiască cu rigla și compasul, el a inventat un instrument cu care a construit-o în mod mecanic. Prin această curbă, el a putut rezolva problema împărțirii unui unghi în trei părți egale dar această soluție, deși perfectă, nu a fost admisă de Platon și geometrii din școala lui, fiindcă nu era conformă cu cerințele problemei (de a folosi rigla și compasul). După Proclus, „symptomul" curbei — adică definiția curbei ca un loc

---

[1] Teza divizibilității infinite a spațiului și a timpului nu-i nici falsă și nici idealistă. Negarea ei implică un spațiu — timp discontinuu, cuantificat, — ipoteză-recentă, deci, în fond, unitatea dialectică a continuității și discontinuității... (Lenin, *Caiete filozofice*).

geometric — a fost stabilit de către Apollonius. Mai tîrziu, Dinostrat (335 î.e.n.) a redescoperit-o și a numit-o cuadratrice.

50. Prin *caracterul* unei curbe, anticii înțelegeau relația care stabilea locul geometric al acelei curbe. Pentru noi, din punct de vedere al geometriei analitice, această denumire înseamnă ecuația curbei. În *Comentariile* asupra cărții I a *Elementelor* lui Euclid, Proclus scria: „Este un obicei obișnuit la matematicieni, cînd se ocupă de linii, să dea caracterul fiecărei specii. Astfel, Apollonius a dat caracterul fiecărei conice, Nicomede a făcut la fel pentru concoide ...“ (P. Tannery, *Mém. sci. II*, 1912, p. 2.)

51. Ca să dovedească această proporție, Dinostrat presupune contrariul, adică folosește metoda reducerii la absurd. Fie, spune el, un segment mai mare sau mai mic decît AH, de exemplu, $AN > AH$ (fig. 10). Atunci, descriind un cerc ZN cu centrul în A, acesta taie cuadratricea în S și prelungind raza AS, ea întîlnește arcul $B\Delta$ în R. Prin ipoteză avem:

$\frac{A\Delta}{\text{arc } BE} = \frac{AN}{A\Delta}$; deoarece $\frac{\text{arc } ZSN}{\text{arc } BE\Delta} = \frac{AN}{A\Delta}$, rezultă că arcul de cerc $ZSN = A\Delta$. Din cauza proprietății cuadratricei avem:

$\frac{\text{arc } SN}{\text{arc } ZSN} = \frac{\text{arc } R\Delta}{\text{arc } BR} = \frac{SM}{BA}$, însă $ZSN = A\Delta = BA$, deci $SN = SM$, ceea ce este absurd. La aceeași absurditate ajunge și dacă presupune că segmentul ar fi mai mic decît AH. (loc. cit. 24 b, p. 226).

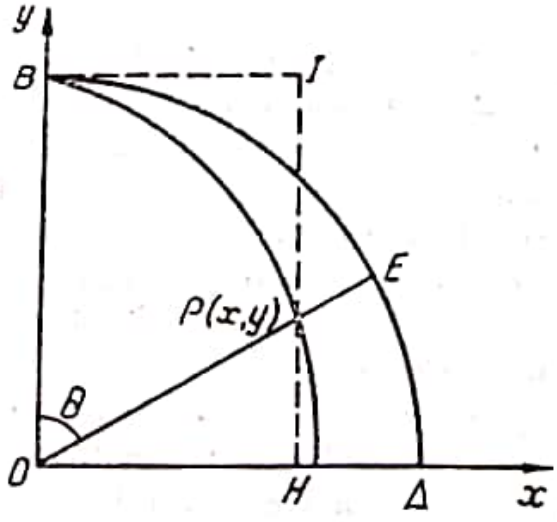
52. *Ecuația cuadratricei*:

Fie $\theta = \text{arc } BE$ (fig. 17). Din definiție avem: $\theta = \frac{\text{arc } B\Delta \cdot IP}{BO}$;

$\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r - y}{r}$; pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$. Dar $\frac{y}{x} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

deci $y = x \text{ tg} \frac{\pi y}{2r}$.

Fig. 17



Abscisa punctului de intersecție a cuadratricei cu Ox se află făcînd $y = 0$ în ecuația: $\lim_{y \to 0} x = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\frac{\pi y}{2r}} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\pi}{2r} \sec^2 \frac{\pi y}{2r}} = \frac{2r}{\pi}$.

Aceasta se vede și geometric, căci pentru valori mici ale lui y, arcul se confundă cu tangenta, deci avem $OH = x = \frac{2r}{\pi}$.

Cum lungimea sfertului de cerc este $L = \frac{\pi r}{2}$, rezultă că proprietatea cuadratricei conduce la rectificarea cercului, adică la stabilirea lungimii lui: $L = \frac{r^2}{OH} = \frac{\pi r}{2}$.

53. *Principiul terțiului exclus* se enunță astfel: din două judecăți contradictorii una este întotdeauna adevărată, cealaltă este falsă, iar altă concluzie nu poate exista. Acest principiu, reflectare în conștiința noastră a unuia dintre aspectele realității materiale, se referă la judecățile contradictorii, adică la acelea care exprimă o alternativă, și este o condiție necesară a gîndirii corecte. Cu vreo 300 de ani înainte de Aristotel, poetul cretan Epimenide a formulat un paradox, — adică o contradicție logic demonstrată —, anume: „Toți cretanii sînt mincinoși". Această afirmație paradoxală nu are soluție adică nu se poate preciza dacă el a spus un adevăr sau o minciună, căci:

Dacă a spus un adevăr, toți cretanii sînt mincinoși și deci *Epimenide a spus o minciună.*

Dacă a spus o minciună, înseamnă că el, în calitate de cretan, confirmă cele ce a spus despre cretani, așa că *Epimenide a spus un adevăr.* Asemenea gîndiri paradoxale l-au constrîns pe Aristotel să formuleze principiul terțiului exclus. Logica matematică studiază îndeaproape asemenea teoreme contradictorii, stabilind cauzele lor.

Gh. Enescu: *Paradoxele logicii matematice*, Cercetări filozofice, 3, 1963, p. 653.

54. Euclid (330—275 î.e.n.) a trăit în Alexandria sub domnia lui Ptolemeu I. Cu el începe adevărata perioadă clasică a matematicilor grecești. A scris mai multe lucrări, dintre care cea mai importantă și mai răspîndită se numește *Elemente* și este formată din 13 cărți. În realitate sînt 15 cărți, dar ultimele două au fost adăugate ulterior. *Elementele* cuprind cea mai sistematică și riguroasă expunere a cunoștințelor de matematică elementară din timpul său. Primele patru cărți cuprind teoremele de geometrie plană, așa cum erau cunoscute pe vremea lui Hipocrate (secolul V î.e.n.). Cartea a V-a conține *teoria generală a proporțiilor* formulată de Eudoxus, iar cartea a VI-a reprezintă o aplicație a acestei teorii la asemănarea figurilor plane.

Cărţile VII—IX se referă la *Aritmetică* şi aici sînt expuse, într-o formă riguroasă, fundamentele *Teoriei numerelor*. Cartea a X-a este cea mai dezvoltată şi cuprinde o expunere sistematică a *Teoriei numerelor iraţionale pătratice*. Într-un *Apendice* se găseşte şi demonstraţia despre incomensurabilitatea diagonalei pătratului cu latura sa. Cartea a XI-a, mai puţin sistematică, prezintă relaţiile fundamentale dintre dreaptă şi plan în spaţiu. Cartea a XII-a conţine teoria fundamentală a lui Eudoxus asupra ariilor şi volumelor. Se stabileşte aici că aria cercului este proporţională cu pătratul diametrului său dar nu se încearcă să se calculeze valoarea numărului π. Se mai determină volumul piramidei, cilindrului şi conului. Euclid nu se ocupă de determinarea volumului şi suprafeţei sferei, căci pe timpul lui nu se cunoştea măsura lor. Acest lucru a fost făcut de Arhimede în lucrarea sa *Despre sferă şi cilindru*. Cartea a XIII-a cuprinde metodele de construire a poliedrelor regulate înscrise şi circumscrise unei sfere şi cîteva dintre proprietăţile lor.

Despre viaţa lui Euclid se ştie foarte puţin. Probabil că s-a născut în Alexandria şi a învăţat la Atena. A fost chemat de Ptolemeu I la şcoala atunci înfiinţată care, în scurt timp, avea să devină centrul cultural al lumii mediteraniene, şi a fost acolo primul profesor de matematici. Tot la şcoala din Alexandria va profesa mai tîrziu şi Apollonius.

55. Loc. cit. nr. 54; Cartea a X-a, 1 şi Cartea a XII-a, 2. Nu se cunoaşte demonstraţia dată de Hipocrate. Metoda folosită de Euclid în demonstrarea acestei teoreme a fost numită mai tîrziu, *metoda exhaustiunii* sau a *epuizării*. Ea se bazează pe principiul lui Eudoxus şi reprezintă o metodă de a stabili în mod aproximativ aria cuprinsă în interiorul unei linii închise. După cum se ştie, în geometria elementară nu se arată cum se pot calcula asemenea arii. Euclid stabileşte că ele pot fi aproximate, înscriindu-se şi circumscriindu-se în ele poligoane ale căror perimetre şi arii sînt cunoscute. Mărind numărul laturilor lor, se pot aprecia astfel limitele dintre care se află cuprinsă aria căutată. (A se vedea şi nota 59 b).

Despre matematicianul grec Eudoxus (408—355 î.e.n.) se ştie că a avut ca profesor pe Arhitas din Tarent (428—365 î.e.n.), apoi a venit la Atena atras de faima lui Platon, care l-a remarcat şi l-a oprit în Academie. Se pare că au făcut împreună şi o călătorie în Egipt unde Eudoxus a învăţat astronomia şi medicina. Neputîndu-se supune doctrinei idealiste platoniciene, Eudoxus s-a retras la Cnidos unde a practicat medicina şi, totodată, a creat o şcoală de matematici şi un observator astronomic. Se povesteşte că el ar fi spus că dacă ar putea ajunge la Soare, ca să-i verifice forma şi să-i stabilească dimensiunile

și natura, ar suferi cu bucurie soarta lui Phaeton[1] dar, neavînd această posibilitate, nu vrea să facă nici un fel de afirmații neîntemeiate.

56. Despre Arhimede, (287—212 î.e.n.) Leibniz a scris astfel „Acei care sînt în stare să-l înțeleagă pe Arhimede, admiră mai puțin descoperirile celor mai de seamă oameni moderni". Se pare că s-a născut în Siracuza, la a cărei apărare a adus o contribuție însemnată. Se știe precis că a fost omorît de un soldat din oastea lui Marcelus, în timpul celui de al doilea război punic, în anul 212, atunci cînd a fost cucerită Siracuza. A călătorit prin Egipt și Babilon, apoi a studiat în Alexandria unde a cunoscut pe astronomul Conon din Samos și pe Eratostene din Cyrene. Împrietenindu-se cu acesta din urmă, îi adresa lui lucrările sale de matematici. La îndemnul lui, a stabilit și o metodă pentru a calcula o valoare mai precisă a numărului π, valoare de care Eratostene avea neapărată nevoie atît în cazul observațiilor astronomice, cît și pentru o determinare precisă a razei pămîntului. Deși a trăit în Siracuza, Arhimede se considera că aparține școlii din Alexandria, tocmai pentru că avea legături cu profesorii de acolo și le trimitea lucrările. După dorința exprimată de el, pe piatra mormîntului său a fost gravată o sferă înscrisă într-un cilindru, ca să se amintească astfel despre una dintre cele mai dragi descoperiri ale sale, anume că „aria totală și volumul cilindrului circumscris unei sfere sînt egale, respectiv, cu $\frac{3}{2}$ din aria și volumul sferei." Cicero povestește că numai datorită acestui fapt, a putut descoperi mormîntul părăsit și uitat al lui Arhimede. Multe dintre lucrările lui Arhimede s-au pierdut, iar altele nu se mai cunosc decît din traducerea lor în limba arabă. Din geometria plană ne-au rămas trei lucrări: *Măsurarea cercului*, *Asupra cuadraturii parabolei* și *Despre spirale*. Din geometria în spațiu: *Despre sferă și cilindru* și *Despre conoizi și sferoizi*, iar din Aritmetică: *Numărarea firelor de nisip* (*Psammit*). Aceasta din urmă reprezintă o îndrăzneață încercare de calcul sistematic cu numere mari, prin care ajunge să stabilească numărul firelor de nisip conținute în Univers[2]. Arhimede a pus bazele matematice la două ramuri din *Mecanică*, anume la *Statică* și *Hidrostatică*, prin următoarele lucrări: *Despre echilibrul planelor* și *Despre corpurile plutitoare*. Faptul că Arhimede a aplicat cunoștin-

---

[1] Phaeton, fiul lui Helios, zeul Soarelui, în trufia lui s-a crezut capabil să conducă el însuși carul tatălui său. Neputînd însă struni caii, s-a apropiat prea tare de Pămînt și era să-l ardă. Atunci, ca să salveze Pămîntul, și totodată să-i pedepsească trufia, Zeus l-a trăsnit.

[2] Arhimede a considerat că distanță de la Pămînt la Soare pe aceea stabilită de astronomul grec Aristarh, — adept al sistemului heliocentric—, de 5 miliarde de stadii, adică de 925 milioane de kilometri. (E. Kolman, *Istoria matematicii în antichitate*, Editura științifică, București, 1963, p. 167.)

ţele de matematică la alte ramuri ale ştiinţelor şi chiar în matematică (pentru a stabili în mod practic metode de calcul ale ariilor şi volumelor), a deschis drumul către *studiul aplicaţiilor practice*, considerate pînă atunci de unii matematicieni idealişti că nu pot face parte din cercetările ştiinţifice. Prin Arhimede au fost legate în mod definitiv *geometria teoretică* de *geometria practică* (numită atunci *geodezie*). Mai tîrziu, prin lucrările lui *Heron* din Alexandria au fost puse şi bazele ştiinţifice ale *Agrimensurii* şi *Ingineriei*.

57. E.T. Bell: *Les grands mathématiciens*, Payot, Paris, 1961, p. 30: „În orice listă a primilor trei dintre cei mai mari matematicieni ai lumii trebuie să fie cuprins şi numele lui Arhimede; ceilalţi doi, care-i sînt de obicei adăugaţi fiind Newton (1642—1727) şi Gauss (1777—1855)".

58. Cercetările lui Hipocrate în legătură cu cuadratura lunulelor au fost continuate şi de alţi matematicieni, stabilindu-se că şi alte lunule au proprietatea de a avea aria egală cu a unui poligon. Generalizarea primei teoreme asupra lunulelor, pentru orice triunghi înscris într-un semicerc, a fost făcută de matematicianul arab ibn al-Haisam (965—1039) (cunoscut în Europa occidentală sub numele de Alhazen), într-o lucrare intitulată *Cuadratura cercului*.
Gino Loria: *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, ed. II, U. Hoepli, Milano, 1914.
H. Wieleitner: *Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde*, München, 1934.
A. P. Iuşkevici: *Istoria matematicilor în evul mediu*. Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1963. (De văzut şi notele 93 şi 101.)

59. a). În cartea lui Arhimede: *Echilibrul figurilor plane*, aria parabolei a fost dedusă pe baza principiilor staticii. Cu toate că demonstraţia era riguroasă, bazîndu-se pe teoremele despre momentele statice şi centrul de greutate al unui triunghi, Arhimede a mai stabilit încă o demonstraţie geometrică în cartea sa *Cuadratura parabolei*. Iat-o: Fie un segment de parabolă ABC (fig. 18) şi CD diametrul care împarte coarda AB în două părţi egale. Punctul C se obţine ducînd tangenta la parabolă paralelă cu AB. Dreapta CD, paralelă cu axa parabolei, este diametrul conjugat cu direcţia AB. Aria segmentului de parabolă este dată de aria triunghiului isoscel ABC, la care se adaugă ariile celor două segmente de parabolă, AC şi CB. În fiecare dintre aceste segmente, se înscrie din nou, şi în acelaşi mod, cîte un triunghi. Fie ele ACE şi CBF. Din proprietăţile parabolei rezultă că aria triunghiului ACE + aria triunghiului $CBF = \frac{1}{4}$ aria triunghiului ABC. Continuînd raţionamentul şi înscriind acum în cele patru segmente de para-

bolă nou formate alte triunghiuri isoscele, Arhimede arată că aria segmentului de parabolă ABC se exprimă prin suma termenilor unei progresii geometrice infinite cu raţia $\frac{1}{4}$, adică:

$$\text{aria segmentului de parabolă } ABC = \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots\right] \cdot \text{aria triunghiului } ABC.$$

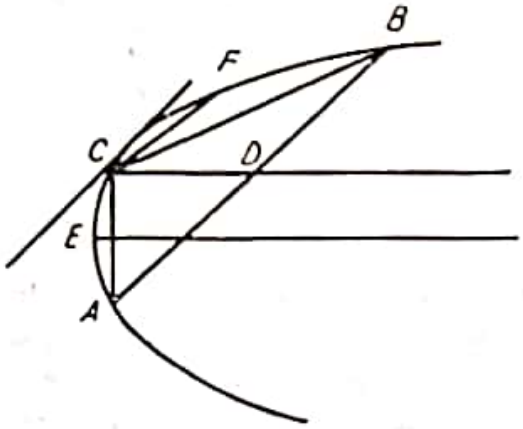


Fig. 18

Ca să stabilească efectiv *aria segmentului* de parabolă, Arhimede nu a calculat suma acestei progresii geometrice infinite, căci pentru a o obţine, era necesar să se aplice procesul de *trecere la limită* care nu era cunoscut de matematicienii de atunci. El a folosit o altă metodă, anume, *întîi* a arătat că „suma unui *număr finit* de termeni ai unei progresii geometrice cu raţia $\frac{1}{4}$ este egală cu $\frac{4}{3}$ din valoarea primului termen şi *apoi*, folosind *metoda reducerii la absurd*, a stabilit că diferenţa dintre aria segmentului de parabolă şi suma ariilor triunghiurilor considerate poate fi făcută mai mică decît orice arie pozitivă oricît de mică. Astfel a putut demonstra că „aria segmentului de parabolă nu este nici mai mare, nici mai mică decît $\frac{4}{3}$ din aria triunghiului înscris, ci chiar egală cu $\frac{4}{3}$ din ea".

b). Metoda folosită aici de Arhimede a fost numită mai tîrziu *metoda exhaustiunii*. Ea se bazează pe următoarele ipoteze, formulate de Arhimede la începutul cărţii sale *Despre sferă şi cilindru*:

1. Linia dreaptă este drumul cel mai scurt între două puncte;
2. Dintre două linii cu aceleaşi extremităţi şi cu convexitatea de aceeaşi parte, linia externă este mai lungă;
3. Lema lui Eudoxus. Despre această lemă, Arhimede a vorbit mai pe larg în prefaţa cărţii *Cuadratura parabolei*. Azi, această lemă poartă numele de *axioma lui Arhimede*, şi Euclid a formulat-o în cartea a X-a a *Elementelor*, astfel: „Considerînd două mărimi neegale, dacă din

cea mai mare se scade una mai mare decît jumătatea ei şi aceasta se va repeta continuu, va rămîne o mărime oarecare mai mică decît cea mai mică mărime considerată" (propoziţia 1).
H. G. Zeuthen : *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen-age*, Paris, 1902, p. 146.

60. Iată scrisoarea lui Arhimede către Dositeu, în care se povesteşte cum a ajuns la cuadratura parabolei : „Arhimede către Dositeu, salut. Cînd am auzit că şi Conon, singurul dintre prietenii care îmi mai rămăsese, a murit, m-am hotărît să-ţi trimit, aşa cum aş fi făcut-o faţă de el, o teoremă de geometrie, de care nu s-a ocupat încă nimeni. Am descoperit această teoremă, întîi prin consideraţii de mecanică şi pe urmă prin raţionamente geometrice. Printre acei care au cultivat geometria înaintea noastră, unii au vrut să stabilească cum se poate afla o suprafaţă rectilinie egală cu un cerc sau cu un segment de cerc ... Dar nu ştiu să fi existat vreun singur om care să fi căutat să afle aria cuprinsă între o dreaptă şi o parabolă, ceea ce am făcut noi acum. Căci noi putem dovedi că un segment oarecare cuprins între o dreaptă şi o parabolă este egal cu de patru ori o treime din triunghiul care are aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime cu acest segment. Ca să dovedim teorema ne-am servit de lema următoare : dacă două suprafeţe sînt neegale şi dacă cu ceea ce cea mai mare întrece pe cea mai mică se adaugă ei însăşi de un număr de ori, se poate întîmpla ca restul adăugat lui însuşi să întreacă o suprafaţă dată şi limitată. Geometrii care au trăit înaintea noastră au folosit de asemenea această lemă ca să dovedească faptul că cercurile sînt între ele în raport dublu[1] şi sferele în raport triplu[2] ... Fiindcă am scris demonstraţiile acestei teoreme, ţi le trimit. Vei vedea cum a fost rezolvată teorema, întîi prin consideraţii de mecanică şi apoi prin raţionamente geometrice".
F. Hoefer : *Histoire des mathématiques*, II-e, ed., Paris, 1879, p. 214

61. Arhimede este singurul geometru din antichitate care a rezolvat problema cuadraturii suprafeţelor plane mărginite de linii curbe. Prin aceasta, încercările lui Hipocrate căpătau o vigoare nebănuită, căci se punea baza unuia dintre cele mai importante capitole ale matematicii moderne : Calculul integral.

62. În cartea lui Arhimede, *Măsura cercului*, se găseşte metoda folosită de el pentru a afla aria cercului. El nu indică însă chiar calculele ce le-a avut de efectuat, ci menţionează numai rezultatele finale la care a ajuns. Din această carte nu s-a păstrat decît un extras cuprinzînd trei propoziţii. Prima, arată echivalenţa dintre aria cercului şi a unui

---

[1] prin „raport dublu" se înţelege raportul *pătratelor* diametrelor.
[2] prin „raport triplu" se înţelege raportul dintre *cubul* diametrelor.

triunghi dreptunghic avînd una dintre catete egală cu lungimea cercului şi cealaltă egală cu jumătate din diametrul lui (raza). Rezultă de aici că pentru a calcula aria cercului trebuia să se cunoască lungimea lui. În acest scop, el a aproximat lungimea cercului prin perimetrul poligonului cu 96 de laturi. A doua propoziţie afirmă că „raportul dintre aria cercului şi pătratul circumscris lui este egal cu $\frac{11}{14}$". După cum observă *Heath* (loc. cit. nr. 24 a, vol. II., p. 50), textul rămas nu corespunde originalului, căci această propoziţie nu a putut fi scrisă de Arhimede înaintea propoziţiei a treia, de care depinde şi al cărui conţinut este: raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său este mai mare decît $3\frac{10}{71}$ şi mai mic decît $3\frac{1}{7}$". Notînd acest raport cu π, avem deci $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Prima teoremă a fost demonstrată prin metoda exhaustiunii, Arhimede folosind poligonul cu 96 de laturi, înscris şi circumscris cercului. Este foarte probabil că această carte a lui Arhimede să nu se fi păstrat şi din cauza caracterului ei practic, pe geometrii greci de atunci lăsîndu-i indiferenţi asemenea descoperiri. În 1896, s-a găsit, la Constantinopol, manuscrisul uneia dintre lucrările cele mai interesante din domeniul geometriei, anume *Metrica* lui Heron din Alexandria (cca 50 î.e.n. şi 100 e.n.) care a circulat în primele secole ale erei noastre, atunci cînd se pierduse cu totul interesul şi chiar posibilitatea de a înţelege problemele de geometrie ce le puneau grecii antici. Cartea lui Heron era un tratat de geometrie practică, scris într-o formă care aminteşte pe acelea de acum, problemele fiind urmate, de exemple numerice sau aplicaţii practice. În această carte, Heron arată că π poate fi considerat ca avînd valorile 3, $\sqrt{10}$ sau $3\frac{1}{7}$, aceasta din urmă fiind cea mai precisă. De asemenea, el afirmă că Arhimede ar fi scris o carte în care aria cercului ar fi fost stabilită cu o aproximaţie şi mai bună, dar greşelile ce se găsesc în manuscrisul găsit, cu privire la transcrierea cifrelor ce indică valoarea numărului π, nu permit să se tragă nici o concluzie sigură.

63. Apollonius de Perga (262—205 î.e.n.) a rămas celebru prin tratatul asupra secţiunilor conice. În această operă, devenită de pe atunci clasică, el a studiat cele mai remarcabile proprietăţi ale conicelor. Lucrarea conţinea aproape 400 de teoreme, împărţite în 8 cărţi, dar nu s-au păstrat toate. Apollonius a început studiul conicelor pornind de la definiţia conului circular drept şi arătînd că acestea se formează prin secţiunile lui cu un plan. El a numit aceste curbe *elipsă*, *hiperbolă* şi *parabolă*. Apollonius a mai scris şi alte cărţi, dar acestea s-au pierdut şi nu se mai cunosc decît prin comentariile făcute de către alţi geometri,

de mai tirziu. După afirmaţiile lui Eutocius (cca 500 e.n.), Apollonius ar fi obţinut o mai bună aproximaţie pentru numărul π „folosind alte numere" despre care ar fi scris în cartea intitulată *Okytokion*, azi pierdută (care ar fi cuprins şi un studiu despre cuadratrice). Dintr-un alt comentariu, datorită lui Jamblicus şi păstrat în *Comentariile lui Simplicius despre Aristotel*, rezultă că şi Apollonius ar fi izbutit să obţină cuadratura cercului, folosind drept curbă „sora concoidei". Azi nu se mai poate afirma cu precizie care ar fi curba ce a fost denumită astfel, dar se presupune că ar putea fi *cuadratricea lui Hippias*, redescoperită de Apollonius, sau *elicea cilindrică* numită şi *cochilia* de către Apollonius. Tot în acel fragment se mai aminteşte şi de o altă curbă cuadratrice, *cu dublă mişcare*, folosită de Carpos din Antiohia.
P. Tannery : *Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité.* Mém. sci., Paris, 1912, vol. II, p.1.

64. Cartea lui Arhimede în care este descrisă această curbă se numeşte *Peri elicon* deoarece el numise această curbă *elice* şi nu *spirală*. Definiţia ei a fost dată în felul următor : „Dacă o linie dreaptă, în care una dintre extremităţi rămîne fixă, se roteşte uniform într-un plan, pînă se reîntoarce la poziţia de la care a plecat şi dacă în timp ce dreapta se roteşte, un punct de pe ea se mişcă uniform, pornind de la extremitatea fixă, punctul va descrie o spirală". Arhimede dovedeşte că dacă P este un punct al primei spire (fig. 19) şi se consideră cercul cu centrul în O, de rază OP, atunci lungimea segmentului OT, numit subtangentă polară[1] este egală cu arcul de cerc ASP, A fiind punctul de intersecţie a cercului cu semidreapta iniţială a spiralei. Arhimede arată, de asemenea, că, dacă P_1 este extremitatea primei spire complete, lungimea cercului de rază OP_1 este egală cu lungimea subtangentei în P_1 şi, în general, dacă P_n este extremitatea spirei a n-a, atunci lungimea subtangentei OT_n este de n ori cît lungimea cercului de rază OP_n [2]. Bazîndu-se pe acest rezultat şi, folosind metoda exhaustiunii, el arată că aria cuprinsă între semidreapta iniţială OA şi prima spiră este egală cu $\frac{1}{3}$ din aria cercului de rază OA. Apoi, că aria inelului ce se formează cînd raza vectoare descrie a doua spiră este în raport de $\frac{7}{12}$ faţă de aria cercului de rază $OB = 4\pi a$; ş.a.m.d. (fig. 20).
Aşadar, Arhimede a arătat că dacă s-ar putea determina ariile acestor porţiuni de spirală, prin ele s-ar putea exprima exact şi aria cercului.

---

[1] Dacă PT este tangenta la spirală în punctul P şi OT perpendiculara în O pe raza vectoare OP, segmentul OT se numeşte *subtangenta polară*.

[2] Această lungime nu *poate fi determinată însă cu rigla şi compasul* pentru că spirala *nu poate fi construită* decît prin puncte şi nu cu rigla şi compasul.

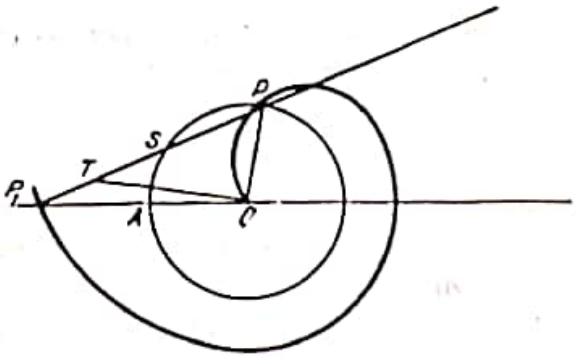


Fig. 19

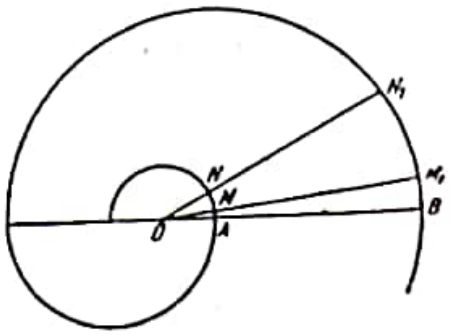


Fig. 20

65. În traducerea poemului astronomic *Fenomenele lui Aratus* făcută de Cicero, acesta a scris: „Geometria a fost în mare cinste la greci, de aceea nimic mai strălucitor decît matematicienii lor, la romani, însă, această artă a fost limitată numai ca să folosească la calculat şi la măsurat". Se vede de aici că romanii şi-au concentrat atenţia asupra problemelor cu caracter practic. Ei nu au lăsat opere matematice remarcabile şi pînă acum nu s-a putut da un răspuns satisfăcător care să poată explica această stare de fapt. Cunoştinţele matematice ale romanilor s-au dezvoltat odată cu dezvoltarea tehnicii lor şi arată că, în primul rînd, la baza lor se află, mai ales, o influenţă etruscă şi egipteană, şi, abia în al doilea rînd, o influenţă greacă. În cartea *Despre agricultură*, scrisă de enciclopedistul roman Marcus Terentius Varro (116—27 î.e.n.), se afirmă că romanii au învăţat să măsoare ogoarele de la etrusci. Un alt om de ştiinţă roman, Vitruvius Pollio (20 î.e.n.), a scris o lucrare în 10 cărţi despre *Arhitectură*, care cuprinde un rezumat al multor lucrări dispărute din matematici, arhitectură, sculptură, muzică etc., şi aici nu se pomeneşte de o altă valoare a lui π în afară de $\pi = 3$. Printre alţi agrimensori de seamă, care au scris despre geometrie, merită citată şi lucrarea lui Sextus Junius Frontinus (40—103 e.n.), fiindcă în ea se menţionează valoarea $\pi = 3\frac{1}{7}$ exprimată în fracţii cu baza 12. O copie a acestor lucrări, scrisă în veacul al VI-lea sau al VII-lea, s-a păstrat sub numele *Codex Arcerianus*.

P. Tannery: *Un nouveau texte de traités d'arpentage et de geométrie*, Mém. sci., 1922, T.V., p. 29.

66. Cassiodore, scriitor latin din veacul al VI-lea, spunea călugărilor din preajma lui: „Dacă literatura greacă nu vă este familiară, atunci citiţi Dioscoride, Hipocrate, Galien şi alte cărţi ce le găsiţi în bibliotecă, traduse în latineşte". Deducem de aici că în bibliotecile mănăstirilor existau cărţi greceşti alături de traducerile lor în latineşte. Carol cel Mare a pus bazele generale ale învăţămîntului din Europa

apuseană cu ajutorul călugărului englez Alcuin, care i-a fost şi lui profesor.

67. În aceste veacuri s-au scris cîteva lucrări de natură enciclopedică ce cuprindeau şi cîte un capitol de geometrie. În ele se află enunţul fără demonstraţie, al unor teoreme din *Elementele* lui Euclid precum şi cîteva dintre cunoştinţele rămase de la agrimensorii romani. Lui π i se atribuie fie valoarea 3, fie $\frac{22}{7}$, dar nu se specifică faptul că aceste valori sînt aproximative.
P. Tannery : *La géométrie du XI-éme siécle*, Mém. sci., vol. V, p. 79.

68. Aceste scrisori au fost schimbate între unii profesori de la şcolile de pe lîngă catedralele din Colonia şi Liège. Înainte de a fi trimise celor în drept, era obiceiul ca ele să fie citite şi comentate în cercurile ştiinţifice respective. Din ele rezultă că acei profesori se străduiau să lămurească noţiunile de *unghi interior* şi *exterior* unui triunghi, însă strădania lor nu a dat rezultat. Ei au ajuns la concluzia că prin *unghi interior* trebuie înţeles un *unghi ascuţit* iar prin cel *exterior* un *unghi obtuz*. E clar că, în asemenea condiţii, nu se putea stabili o demonstraţie despre suma unghiurilor dintr-un triunghi deşi se ştia că este egală cu două unghiuri drepte. În aceste scrisori, lui π i se atribuia valoarea $\pi = 3\frac{1}{8}$, de origine necunoscută, precum şi $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ de origine egipteană. P. Tannery : *Une correspondence d'écolatres du XI-ème siècle*, Mém. sci., vol. V, p. 103 şi 229.

69. Dezvoltarea învăţămîntului matematic îi datorează mult savantului Gerbert (942—1003), fost profesor la şcoala de pe lîngă catedrala din Reims şi apoi devenit papă, sub numele de Silvestru II. A fost unul dintre oamenii cei mai remarcabili din veacul al X-lea, întrecînd în cultură şi inteligenţă pe cei mai mulţi dintre contemporanii lui. În matematici a scris *Regula de abaco computi*, *Libellus de numerorum divizione* şi *Liber abaci*. El a confecţionat atît abace cît şi globuri cereşti, care au stîrnit admiraţie şi multe dintre ele au fost schimbate pentru a obţine manuscrise ale operelor clasicilor romani. Prin a doua jumătate a veacului al XI-lea, circula o geometrie atribuită lui Gerbert. De fapt, lucrarea se compunea din trei părţi distincte, foarte probabil scrisă de trei autori diferiţi după moartea lui Gerbert. Lucrarea cuprindea culegeri de definiţii geometrice şi probleme de agrimensură şi purta numele de *Podismus*.
H. Weissenborn : *Gerbert, Beiträge zur Mathematik des Mittelalters*, Berlin, 1988.
F. Picavet : *Gerbert, un pape philosophe*, Paris, 1897.
P. Tannery : *Gerbert et les agrimenseurs romains*, Mém. sci., vol. V, p. 94.

70. În adevăr, numind r raza cercului, L_p și l_p laturile pătratului circumscris și înscris, avem : $L = 2r$ și $l = \sqrt{2r}$, deci aria cercului fiind medie proporțională între ariile celor două pătrate, rezultă :
$\pi^2 r^4 = 2r^2 \cdot 4r^2$ de unde $\pi^2 = 8$ sau $\pi = \sqrt{8} = 2{,}82$.

71. a) Se cunoaște un singur manuscris complet al acestei lucrări, scris în latinește. El a fost transcris de către Dr. Winterberg sub titlul : *Der Traktat Francon's von Leuttich : De quadratura circuli*, Abhandlung Geschichte Mathematik, vol. IV, 1882, p. 135.
b) P. Tannery : *Francon de Liège*, Mém. sci., vol. V, p. 86, 255, 259.

72. Loc. cit. nr. 71 a, Cartea I, p. 143.

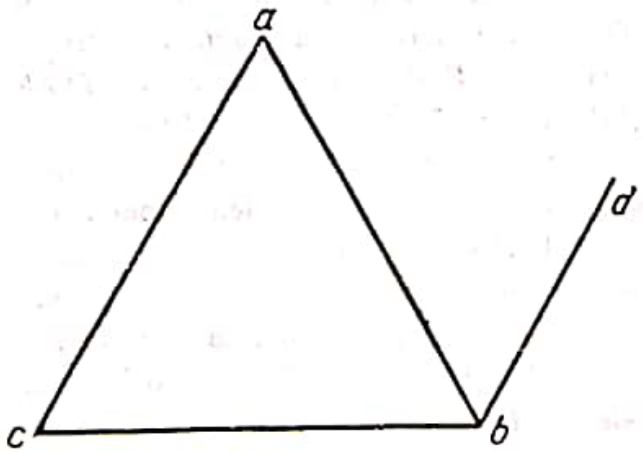
73. P. Tannery : loc. cit. nr. 71 b, p. 232, nota 1 și
M. Cantor : *Vorlesungen Geschichte mathem.*, vol. I, 1907, p. 876.

74. E. Gebhart : *L'état d'âme d'un moine de l'an 1 000.* Revue des deux mondes, T. 107, 1891, p. 600 și Picavet, loc. cit. nr. 69.

75. Ad. Quetelet : *Histoire des sciences mathématiques chez les Belges*, Bruxelles, 1871, p. 33, 34.

76. Noțiunea de unghi interior și exterior unui triunghi se pierduse cu totul în veacurile X—XII. Francon are meritul de a fi sesizat noțiunea reală de unghi interior. Cît privește pe aceea de unghi exterior, el greșea fiindcă presupunea că latura exterioară *bd* pornește din *b* într-o direcție oarecare și nu în prelungirea laturii *bc*. El scria : „unghiul *abc* este interior pentru că este cuprins între limitele figurii pe cînd unghiul *abd* este exterior pentru că apare mai sus, alăturat în acest mod" (fig. 21).

Fig. 21



77. Informațiile din această conversație se găsesc în cartea lui Francon, p. 143. Francon a aflat despre problema cuadraturii cercului, spunea el, dintr-un tratat de logică, anume *Comentariile lui Boetius asupra*

categoriilor lui Aristotel. Așa se explică faptul că Francon a trecut pe lîngă problema cuadraturii cercului fără să știe despre ce este vorba în ea. Aceasta se poate vedea clar din aceea că el considera că *valoarea aproximativă* a numărului π, anume $\pi = \frac{22}{7}$ este *exactă*. De aici însă rezultă că și valoarea pe care o calcula el pentru *aria cercului* era o *valoare exactă* și nu aproximativă, așadar nu mai avea cum să existe o problemă a cuadraturii cercului odată ce aria lui se putea calcula cu exactitate. Dar, fiindcă Francon *știa* că există, el credea că aceasta apare din alte considerații, fiind imposibil de rezolvat din punct de vedere geometric.

78. Francon a ajuns la noțiunea de *număr irațional* observînd că nu se poate extrage rădăcina pătrată dintr-un număr care nu este pătrat perfect. Dar acest lucru nu-i putea ajuta să înțeleagă despre ce este vorba în cazul cuadraturii geometrice a cercului pentru că el, ca și contemporanii săi, considera *geometria* ca o știință experimentală. Așadar, el considera că, numai exprimată prin numere cuadratura cercului nu era posibilă, pe cînd experimental, adică geometric un cerc putea oricînd fi transformat în pătrat și invers.

79. Aici apare o fracție cu numitorul 12 deoarece romanii împărțeau întregul în 12 părți. Pe baza calculelor sale, Francon afirma, cu drept cuvînt, că $50^2 \neq \left(5 + 5\frac{5}{12}\right)^2$. În discuție, el făcea aluzie la singura relație metrică pe care o cunoștea aceea că pătratul construit pe diagonala unui pătrat are aria de două ori mai mare decît a pătratului considerat.

80. Francon credea că problema cuadraturii cercului constă în transformarea dreptunghiului cu laturile 11 și 14 într-un pătrat, căci el nu știa cum se construiește media proporțională între două segmente date și el căuta să rezolve această problemă prin diferite mijloace, printre care și cîntărirea figurilor.

81. Iată în traducere din limba latină și alte paragrafe, de aceeași natură, din cartea a V-a (p. 166 b — 167 a): „Această schimbare nu o refuză îndeosebi însușirea unei mase de ceară, căci aceasta pierzîndu-și duritatea în contact cu căldura focului permite să fie separată printr-un fir neîntrerupt sau să fie rotunjită sub forma unei mingi ... De asemenea, la lichide există posibilitatea de a observa același caracter. Cine nu știe că apa, vinul, mierea și celelalte de acest fel, fiind puse într-un vas rotund, își păstrează și ele configurația rotundă. Trecerea însă a aceluiași lichid într-un vas lunguieț face ca, în mod inevitabil, lichidul să primească o întindere a lungimii sale din care, de asemenea, poate fi readus la forma dinainte ...“

82. Iată cum începe cartea a VI-a (p. 173 b-173 c): „Pentru stabilirea sau pentru demonstrarea egalității cercului cu a pătratului socotesc că nimic n-ar folosi așa de mult decît dacă s-ar descoperi metoda diviziunii unei figuri și a celeilalte. Orice diviziune a formelor, ori este naturală, ori se obține în mod metodic ... Diviziunea naturală s-ar părea că se obține în două moduri, anume: sau se trag linii de la o latură spre latura opusă, prin care figurile se împart în două sau în trei, (fig. 22) ... sau de la un punct care ocupă locul din mijloc, ele se scot înspre afară ... Sînt, totuși, unele figuri care sînt lipsite de laturi, cum este cercul iar altele al căror mijloc nu poate fi indicat, cum este triunghiul isoscel sau oarecare ... De aceea un triunghi de felul acesta este străin de ambele diviziuni. Dar cercul, pentru că punctul său este depărtat în mod egal de orice circumferință, ar putea să accepte acea diviziune care se face cu ajutorul liniilor ... Din contra, suprafața unui pătrat, întrucît este rectangulară și închisă de patru laturi, de care punctul fix se găsește la o distanță egală de mijloc, nu refuză nici un mod, nici celălalt, de diviziune“ ...

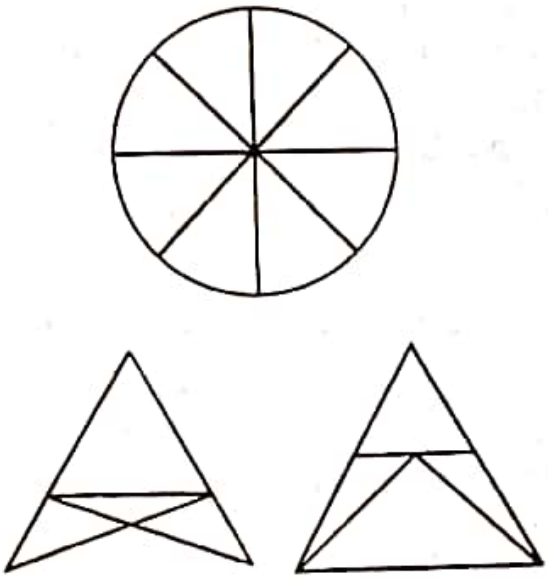


Fig. 22

83. Profira Sadoveanu: *Somnul pietrei*, Editura Eminescu, București, 1975, p. 10.

84. Sophie Germain (1776—1831). Istoria matematicilor păstrează numele multor femei care au îndrăgit această știință și au contribuit, prin talentul și entuziasmul lor, la progresul și răspîndirea cunoștințelor matematice. Astfel, de acum vreo 2 500 de ani, se păstrează în tradiția greacă numele lui Theano, eleva cea mai dotată a lui Pitagora care se pare că a scris și o biografie a lui, azi pierdută. Apoi, pe la începutul veacului al V-lea e.n., a trăit Hypatia, vestită prin cursurile de matematici ce le ținea la școala din Alexandria. În veacul al XVII-lea, la

Universitatea din Bologna, Maria Gaetana Agnezi preda cursuri de matematici care erau elogiate chiar de Academia de ştiinţe din Paris. Tot în acest veac s-a născut şi Sophie Germain, altă pasionată matematiciană, de numele căreia este legată şi o formulă din teoria suprafeţelor ce are aplicaţii şi în *Fizica-matematică*, anume *curbura medie*. Se povesteşte că talentul ei matematic s-a relevat printr-o întîmplare curioasă. Pe cînd avea 13 ani, a găsit în biblioteca tatălui ei cartea de *Istorie a matematicilor* scrisă de Montucla. Acolo a citit ea povestea morţii lui *Arhimede* şi a impresionat-o, *nu moartea în sine, ci atitudinea lui* Arhimede. Cum se poate — se întreba ea după aceea, zile în şir —, să existe o ştiinţă care să te absoarbă într-atît încît să nu-ţi pese nici de ameninţarea cu moartea ? De atunci, s-a născut în ea dorinţa ca să studieze matematicile şi, dacă la început părinţii nu au avut nimic de obiectat, mai tîrziu s-au speriat de pasiunea pe care o punea în aceste studii şi au încercat să o domolească, întîi cu binele apoi cu constrîngeri, luîndu-i hainele, hrana, lumina, căldura, dar totul a fost în zadar. Sophie Germain a ajuns o matematiciană de seamă şi a fost chiar premiată de Academia de ştiinţe din Paris pentru memoriul : *Asupra vibraţiilor lamelor elastice.* A purtat o vastă corespondenţă matematică cu marele matematician Gauss, mai ales asupra unor probleme din teoria numerelor. Dar, temîndu-se ca nu cumva Gauss să aibă idei preconcepute asupra capacităţii matematice a unei femei, ea a iscălit scrisorile sale cu numele M. Leblanc. De-abia mult mai tîrziu, Gauss a aflat adevărul.

85. Iată lista unora dintre cele mai renumite tratate generale de istorie a matematicilor : a). Moritz Cantor : *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig 1907, vol. I—IV ;
b). David E. Smith : *Hystory of mathematics*, vol. I—II, Boston, 1925 ;
c). Dr. J. Tropke : *Geschichte der Elementar Mathematik*, vol.I—VII, (vol. IV : geometrie plană) Berlin, 1923 ;
d). E. Kolman : *Istoria matematicii în antichitate*, Bucureşti 1963;
e). A. P. Iuşchevici : *Istoria matematicii în evul mediu*, Bucureşti, 1963 ;
f). H. Wieleitner : *Istoria matematicii pînă în secolul al XIX-lea*, Bucureşti, 1964.
În ultimele trei cărţi se află o bibliografie aproape completă asupra altor lucrări.

86. În ordine cronologică, cele mai cunoscute reviste de istorie a matematicilor, sînt :
a). *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, Edit. B. Boncompani, 1868, a apărut pînă în 1887. Cu acelaşi titlu a fost reeditată, din 1898, de către Gino Loria şi a apărut pînă în 1917;

b). *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematichen Wissenschaften*, din 1887 pînă în 1913, editată de M. Cantor;

c). *Biblioteca Mathematica*, editată de G. Enestrőm, din 1884 pînă în 1915;

d). *Isis*, editată de G. Sarton, din 1913;

e). *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, apare din 1929, în două părți: 1. Izvoare, 2. Studii, editată de Otto Neugebauer;

f). *Scripta Mathematica*, din 1923, editată de I. Ghinsburg;

g). *Osiris*, editată de G. Sarton, din 1936;

h). *Istorico-matematiceskie isledovanie*, editată de G.F. Ribkin și A. P. Iușkevici, din 1948;

i). *Historia Mathematica*, editată de Kenneth O. May, din 1974.

87. B. Datta and A. N. Singh: *Hystory of hindou mathematics* 1935.

88. În India, ca și peste tot, cunoștințele de astronomie și geometrie au fost condiționate, din timpurile cele mai vechi, de necesitățile practice, în primul rînd, irigații, navigație, comerț și apoi de necesitățile ritualului religios care impunea o anumită formă și poziție a altarului și anumite date sau momente ale zilei consacrate rugăciunilor. Cunoștințele de geometrie și astronomie se găsesc întîi în cărțile religioase, știința făcînd atunci parte din domeniul teologiei. O asemenea colecție de cărți se cunoaște sub numele de *Siddhanta*, titlu ce se traduce prin „sisteme" sau „concluzii stabilite cu privire la ceva". *Surya Siddhanta*, adică *Sistemul Soarelui*, face parte din primele cărți științifice hinduse și se presupune că a fost scrisă între 500 î.e.n. și 500 e.n.

89. a). R. C. Gupta: *Aryabhata I's value of* π, The Mathematics Education vol. VII, 1, 1973, 17.
Y. Mikami: *The circle squaring of the Chinese*, Bibl. Math. X (3), 1909 p. 103,

b). Gino Loria: loc. cit. Storia, v. I, p. 277,

c). A. P. Iușkevici: loc. cit. p. 77.
Peste vreo 11 veacuri, același raport va fi redescoperit în Europa. (vezi nota nr. 120.)

90. Din vremea califului al-Mansur (712—774) Bagdadul a devenit un punct de atracție pentru învățați, mai ales astronomi și medici. În tratatul de pace încheiat de al-Mamun (813—833) cu împăratul bizantin Mihail al III-lea, se specifica faptul că se punea la dispoziția califului de Bagdad toate cărțile grecești ce se aflau în împărăție. Aceste cărți au fost expediate din Cipru către Bagdad și acolo au fost traduse în limba arabă.

91. Aproape toți matematicienii arabi erau și astronomi iar unii dintre ei se ocupau îndeaproape și de astrologie, cerută de personalitățile din pătura conducătoare de atunci.

92. Printre geometrii remarcabili de atunci se aflau și cei trei frați Banu Musa: Muhammed, Ahmed și Hasan, care au trăit în prima jumătate a veacului al IX-lea. Ei și-au cheltuit cea mai mare parte din avere, ca să adune manuscrise matematice grecești, pe care le-au tradus în limba arabă. Printre aceste traduceri se numără și *Elementele* lui Euclid. Tot ei au scris și o carte de geometrie, care a fost tradusă în latinește de către Gherard din Cremona, purtînd ca titlu: *Cartea de geometrie a celor trei frați*. În legătură cu determinarea ariei și a lungimii cercului, ei au folosit pentru π două valori: $\pi = \sqrt{10}$ și $\pi = \frac{22}{7}$. Alte cărți scrise de ei sînt: *Măsura sferei*, *Trisecția unghiului*, *Despre măsura figurilor plane și sferice ș.a.*

H. Suter: *Die Mathematiker der Araben*, Abh. Gesch. Math., X, 1900, p. 20 n. 43.

A. P. Iușkevici: *Istoria matematicii în evul mediu*, 1963, p. 288.

93. Abu Ali al Hasan ibn al-Haisam (965—1039) a scris printre altele o lucrare despre *măsurarea paraboloizilor* care, prin frumusețea și numărul mare de teoreme demonstrate, se numără printre cele mai strălucite opere matematice arabe. În ea se generalizează rezultatele stabilite de Arhimede în cazul paraboloizilor de rotație și, în plus, se introduc paraboloizii obținuți prin rotirea parabolei în jurul unui diametru oarecare al ei (nu numai al axei) și a corpurilor născute din rotirea unui segment de parabolă, în jurul ordonatei perpendiculare sau oblice față de diametru. Se spune de el că, atunci cînd a venit în Egipt, a încercat să îndrepte cursul Nilului astfel ca să fie folosit și cînd nivelul apelor ar fi fost mai mare sau mai mic decît cel normal, și în acest scop i s-au pus la îndemînă toate mijloacele necesare. Curînd însă, și-a dat seama de imposibilitatea de a realiza acest plan și, temîndu-se să nu plătească lăudăroșenia sa cu viața, a simulat nebunia și s-a închis în casă pentru totdeauna. Se pare că, în realitate, a suferit un șoc nervos căci, deși mai tîrziu i s-a iertat nereușita acestei încercări, el a continuat să ducă viața în izolare, pînă la sfîrșitul vieții. Pe lîngă multe lucrări importante din matematici și fizică el a scris și tratatul amintit despre cuadratura cercului.

H. Suter: *Die Abhandlung die Ausmessung des Paraboloides von al-Haisam*, Bibl. Math. XXI (3) 1911, p. 289. Vezi nota n. 58.

94. a). F. Woepcke: *L'algebre d'Omar Alkhayyami*, Paris, 1851.

b). Omar al-Khayyam (1048—1123), de origine iraniano-tadjică, s-a născut la Nișapur, localitate în nord-vestul Persiei, pe la 422 era hegiră (nota nr. 95) și a murit în același oraș, în 517 e.n. A fost un savant renumit, filozof, poet, geometru și astronom. Sub conducerea lui,

dar ajutat de alţi 8 astronomi, s-a preconizat prima reformă a calendarului musulman, în anul 1079, reformă care se spune că a dat calendarului musulman o precizie mai mare decît aceea la care s-a ajuns în Europa, cinci secole mai tîrziu, prin reforma gregoriană.Concepţiile filozofice ale lui Omar Khayyam au jucat un rol de seamă în întreaga dezvoltare a filozofiei iraniene. El a arătat că metoda scolastică nu este cea indicată pentru a dezlega tainele naturii înconjurătoare, după cum nici Coranul nu cuprinde adevărul veşnic şi absolut asupra lumii. B. A. Rozenfeld: *Omar Haiam*, Traktatî perev, 1962, Moscova B. A. Rozenfeld şi A. P. Iuşkevici: *Omar Haiam*, Moscova, 1965.

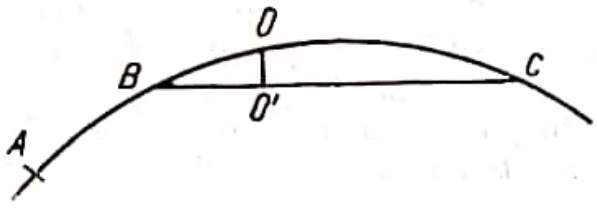
95. Era hegiră, de la cuvîntul arab: *el hegire* = fugă, începe din anul cînd Mahomed a fugit de la Mecca la Medina, anume din 10 iulie 622 e.n. Anul arab se socoteşte însă de 354 zile, ca în vechiul calendar roman, fiind un *an lunar* şi nu *solar* ca cel european şi oficial-universal. F. Hoeffer: *Histoire de l'astronomie*, Paris 1873, p. 256.

96. În anul 467 e.n. (1074—1075 e.n.) Omar Khayyam a fost chemat de şahul Malik ca director al noului observator astronomic fondat la Merv, împreună cu alţi doi astronomi: Abul Mozaffar al-Isfaraini şi Meimun ibn al-Negib (loc. cit. nr. 92: Suter, p. 113).

97. Numele lui Mozaffar, probabil elev al lui Omar, apare de multe ori alături de al acestuia. A murit în 512 şi se pare că a fost fiul lui Abul Mozaffar, colegul lui Omar la observatorul din Merv.

98. Al. T. Stamatiad: *Catrenele lui Omar Khayyam*, Cartea Românească, Bucureşti, 1932. Poemele sînt traduse în proză (nr. 38, p. 39.)

99. În *Cronica Indiei* sau *Cartea asupra verificării despre ceva ce are India de acceptat sau de combătut în ceea ce priveşte ştiinţa şi istoria*, din anul 1031.



În cartea *Despre găsirea coardelor în cerc* au fost adunate multe demonstraţii ale teoremelor fundamentale necesare la calcularea tabelelor de coarde. După cum se ştie, grecii, chiar şi arabii la început, au folosit în locul *sinusului unui arc* coarda corespunzătoare acelui arc (dublul sinusului). O tabelă de coarde corespundea deci unei tabele moderne de sinusuri. În cartea amintită, al-Biruni citează 23 de

demonstrații diferite ale teoremei: „Linia frîntă înscrisă într-un arc de cerc și formată din două segmente neegale (fig. 23) este înjumătățită de perpendiculara coborîtă din mijlocul arcului pe ea ($AB + BD' = D'C$). Culegerea lui al-Biruni are o importanță istorică deosebită fiindcă el citează pe autorii acestor demonstrații și printre ei se află Arhimede. Aceasta e singura dovadă care a ajuns pînă la noi că și Arhimede a fost interesat de pregătirea unei tabele de coarde. *Istoria filozofiei*, Editura științifică, vol. I, București, 1958, p. 209. H. Suter: *Das Buch der Auffindung der Sehnen in Kreise von Abu-r-al-Biruni*, Bibl. Math., XI, 3. 1910, p. 11.

100. H. Suter: *Die Kreisquadratur des Ibn al-Haisam*, Zeitschr. für Math. und Phys., Bd. 44, 1899, Hist. Abt., p. 33.

101. Iată demonstrația dată de ibn al-Haisam: „Ducem într-un cerc oarecare un diametru, luăm pe unul dintre semicercuri un punct oarecare B și ducem din el două drepte la extremitățile diametrului. Pe ele se descriu două semicercuri. Ariile celor două lunule, formate din aceste semicercuri și arcele de cerc, sînt egale cu ale triunghiului din primul cerc. Am dovedit această teoremă în cartea despre lunule dar voi reda și aici această demonstrație. Fie cercul ABG (fig. 24) și O centrul lui. Ducem diametrul AOG și luăm punctul B pe cerc. Să ducem dreptele BG și AB și să descriem pe ele semicercurile AEB și BZG. Spunem că cele două lunule $AEBH$ și $BZGT$ fac la un loc cît triunghiul ABG. Dovada: raportul a două cercuri este egal cu raportul pătratelor diametrelor lor, după cum se dovedește în teorema a II din cartea XII-a a *Elementelor*, adică:

$$\frac{\text{cerc } BZG}{\text{cerc } BEA} = \frac{BG^2}{AB^2} \text{ și prin adunare avem:}$$

$$\frac{\text{cerc } BZG + \text{cerc } BEA}{\text{cerc } BEA} = \frac{BG^2+AB^2}{AB^2}; \quad \text{dar } BG^2+AB^2 = AG^2 \text{ deci}$$

$$\frac{AG^2}{AB^2} = \frac{\text{cerc } BZG + \text{cerc } BEA}{\text{cerc } BEA}; \text{ dar mai avem încă: } \frac{AG^2}{AB^2} = \frac{\text{cerc } ABG}{\text{cerc } BEA}$$

$$\text{deci: } \frac{\text{cerc } BZG + BEA}{\text{cerc } BEA} = \frac{\text{cerc } ABG}{\text{cerc } BEA}, \text{ adică cerc } ABG = \text{cerc } BZG +$$

$+$ cerc BEA.

Așadar, semicerc ABG = semicerc BZG + semicerc BEA. Dacă scădem acum ambele segmente AHB și BTG, care aparțin atît cercului ABG cît și celor două semicercuri AEB și BZG, obținem:
aria triunghiului ABG = aria lunulei $AEBH$ + aria lunulei $BZGT$.
Dacă cele două arce AHB și BTG sînt egale, atunci (fig. 25) și

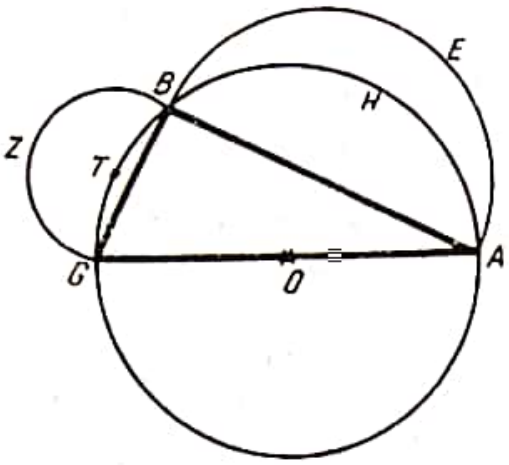


Fig. 24

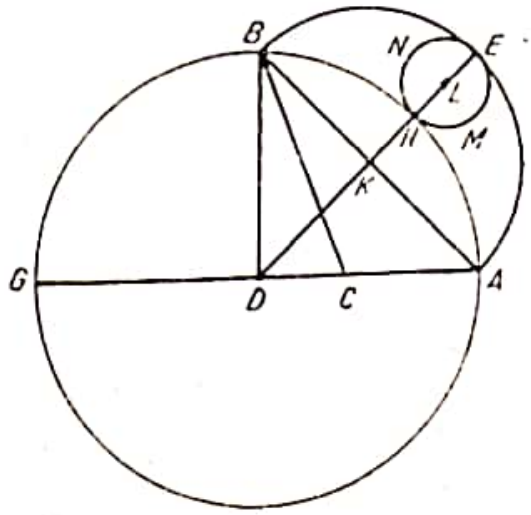


Fig. 25

$AB = BG$. La fel și cele două cercuri BZG și AEB ca și jumătățile lor, și încă lunulele $AEBH$ și $BZGT$. Dacă ducem dreapta BD, atunci ambele triunghiuri ABD și BGD sînt egale și deci fiecare dintre ele este egal cu una dintre lunule, de exemplu, lunula $AEBH$ = triunghiul ABD.

102. Iată demonstrația: $\frac{\text{triunghiul } ABD}{\text{triunghiul } BCD} = \frac{AD}{DC}$; dar $\frac{AD}{DC} = \frac{\text{lunula } AEBH}{\text{cerc } HEMN}$

deci $\frac{\text{triunghiul } ABD}{\text{triunghiul } BDC} = \frac{\text{lunula } AEBH}{\text{cerc } HMEN}$ sau, prin schimbarea mezilor: $\frac{\text{triunghiul } ABD}{\text{lunula } AEDH} = \frac{\text{triunghiul } BDC}{\text{cerc } HMEN}$; dar cum aria lunulei $AEBH$ este egală cu aria triunghiului ABD, rezultă că cercul $HEMN$ = triunghiul BDC.

103. Aluzii la lucrarea lui Omar Khayyam despre postulatul paralelelor. Această carte începe așa: „Comentarii asupra greutăților din prima carte a lui Euclid". Autorul arată că a adus îmbunătățiri operei lui Euclid făcînd adăugiri, începînd cu propoziția 28 (care se referă la condiția ca două drepte să fie paralele).
D. E. Smith: *Euclid, Omar Khayyam and Saccheri*, Scripta Math., v. 3, 1935, p. 5.

104. Numai datorită traducerilor în limba arabă, în Europa occidentală au putut fi citite operele matematicienilor greci în timpul evului mediu timpuriu, fiindcă atunci aproape nimeni nu mai cunoștea limba greacă.

105. Scrierile arabe au pătruns în Europa prin Spania și nu direct din Asia. Cu toate că relațiile politice dintre califatul din Bagdad și cel din Cordova erau încordate, schimburile culturale nu erau între-

rupte şi mulţi savanţi din Bagdad veneau în Spania. În şcolile maure din Cordova, Granada, Toledo, Sevilla, se comentau lucrările matematice greceşti. Cordova avea o bibliotecă cu vreo 60 000 de volume şi un catalog format din 44 de volume.

106. Adelard din Bath (cca 1 120) a călătorit mult prin Asia, Grecia şi Egipt aducînd de acolo multe manuscrise de matematici. Traducerea *Elementelor* lui Euclid, făcută de el după versiunea arabă, a servit ca model celorlalte traduceri ce s-au făcut după aceea, pînă în veacul al XVI-lea, cînd a fost descoperit textul grecesc.

107. Gherhard din Cremona (1114—1187), după ce a studiat la Toledo, a început să traducă din limba arabă în latineşte multe cărţi de medicină şi astronomie, dar nu la întîmplare, ci după cum se exprimă singur: „în mod prudent, ca un om ce se plimbă printr-o grădină plină de flori şi alege pe cele mai frumoase". A tradus pînă în ultimul an al vieţii lui şi a lăsat toate traducerile oraşului său natal Cremona. Fiindcă, din modestie, nu a iscălit nici una din scrierile lui, prietenii săi au întocmit o listă a lor şi aceasta s-a păstrat pînă azi. Ea cuprinde 74 de volume, printre care şi *Elementele* lui Euclid. Pierre Duhem: *Le système du monde*, T. III, Paris, 1915, p. 216.

108. Platon din Tivoli se pare că a fost contemporan cu Gherhard din Cremona. El a tradus în limba latină nu numai cărţi din limba arabă, ci şi din limba ebraică. Astfel este cartea de geometrie a lui Savasorda, pe care a intitulat-o *Liber embadorum*, latinizînd cuvîntul grecesc *embadon* = arie. Această carte a avut o largă circulaţie în toată perioada evului mediu. Unii autori susţin însă că traducerile lui Platon din Tivoli ar fi fost făcute mai înainte decît acelea ale lui Gherhard şi chiar ale lui Adelard.

109. Abraham bar Chiia (1070—1136), născut în Barcelona şi cunoscut sub numele de Savasorda, a scris Geometria sa în limba ebraică. El a colaborat la traducerile pe care le efectua Platon din Tivoli, care a stat în Barcelona, între anii 1134 şi 1145. Numele de Savasorda este o latinizare a denumirii arabe *sahib al şutra*, adică *şeful pazei*.
M. Curtze: *Urkunden zur Gesch. der Trig.*, Bibl. Math., (3), p. 321.
P. Tannery: Mém. Sci., vol. V, p. 332.
M. Curtze: *Urkunden zur Gesch*, Abh. Gesch. Math., XII, Heft 1, 1902, p. 1.

110. Leonardo Fibonacci (1170—1250) din Pisa a studiat matematicile cu profesori mauri, apoi a făcut multe călătorii în Egipt, Siria, Grecia, Sicilia şi în Provence. Aceste călătorii le-a făcut din cauză că era trimis de tatăl lui, negustor foarte bogat, care avea sucursale ale casei sale de comerţ în aceste localităţi, şi, cu această ocazie, el s-a putut încredinţa

de greutăţile ce erau legate de metodele de calcul moştenit de la romani : cifrele romane şi abace. Aceasta îl îndeamnă să scrie o carte de aritmetică unde introduce scrierea numerelor cu cifre arabe şi calculele făcute pe hîrtie. Cartea cu titlul de *Liber abaci* cuprinde şi elemente de algebră arabă şi hindusă. Altă carte, scrisă de Fibonacci prin 1220, a fost *Practica geometria*. După observaţia lui M. Curtze (loc. cit. ns. 109, p. 5), cu toate că Leonardo a folosit ca model cartea lui Savasorda, el a dat o mai amplă dezvoltare multora dintre capitolele lucrării sale. De-altfel, Fibonacci nu a folosit numai această lucrare, ci şi ale altor autori ca : Arhimede, fraţii Banu Musa ş. a. *Practica geometria* este superioară modelului şi prin faptul că conţine multe idei originale.

111. Iordanus Nemorarius a trăit în prima jumătate a secolului al XIII-lea. Alături de Leonardo, a fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai evului mediu. Pe lîngă cartea de geometrie, *De triangulus*, a mai scris lucrarea *De Isoperimetris*.

112. Giovanni Campano din Novara a trăit în apropiere de Milano pe la 1260. Este cunoscut prin traducerea şi comentarea *Elementelor* lui Euclid şi a *Almagestei*, ca şi prin cercetările sale originale în legătură cu proprietăţile pentagonului regulat stelat.

113. În *Elemente*, Cartea a III-a, teorema 16, Euclid introduce noţiunea de unghi format de un arc de cerc şi tangenta la una dintre extremităţile acestui arc şi dovedeşte că „acest unghi este mai mic decît orice unghi ascuţit". De-abia în secolul al XIII-lea, unghiul acesta a fost numit de Nemorarius *unghi de contingenţă*, iar de alţii, *unghi de contact*. Despre acest unghi au existat multe discuţii şi controverse care au fost limpezite abia în secolul al XVII-lea, de către Newton, după ce a fost inventat *Calculul diferenţial* şi s-a aplicat la studiul curbelor.
Victor Marian : *Euclid, Elemente*, vol. I., Bucureşti, 1939, p. 234 (Adnotări).

114. Thomas Bradwardin (1290—1349). Dintre lucrările lui cele mai cunoscute sînt : *Tractatus de Proportionibus*, imprimat la Paris în 1495, odată cu *De quadratura circuli*, apoi *Arithmetica speculativa* (adică teoretică) şi *Geometria speculativa*, tipărite tot la Paris, prima în 1502 şi cealaltă în 1511.

115. În veacul al XII-lea au fost înfiinţate primele universităţi care au purtat numele de „Universitas magistrorum et scolariorum". Cea mai veche a fost Universitatea din Bologna (1100) şi apoi cea din Paris (1150), Cambrige (1210), Padova (1222), Neapole (1224), Viena (1365) etc.

116. Albertus de Saxonia (1325—1390). În lucrarea sa, Albertus îl citează pe Campanus însă nu-l pomenește pe Bradwardin, deși, el demonstrează unele teoreme pe care acesta le enunțase numai !

H. Suter: *Der Tractatus „de quadratura circuli" Albertus de Saxonia*, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 29, 1884, abt. Hist. lit., p. 81.

117. Dominicus Parisiensis pare să fie primul savant a cărui operă să fi exercitat o influență pozitivă asupra învățămîntului matematicilor. El a reușit să stabilească o legătură între învățămîntul teoretic și cel practic și cartea sa a avut o mai largă circulație decît aceea ale lui Fibonacci, care au rămas numai într-un cerc restrîns și nu erau răspîndite în universități.

118. În universități se învăța atunci foarte puțină matematică. Mai întîi se studia gramatica, apoi logica lui Aristotel și retorica lui Cicero. În fine, se preda aritmetica după Boetius, muzica după Pitagora, geometria după Euclid și astronomia după Ptolemeu. Deși la început ele au avut un caracter laic, cu timpul au intrat sub influența bisericii și au devenit centrele învățămîntului scolastic.

119. Nicolai Copernic (1473—1543). Vezi *Figuri ilustre din perioada Renașterii*, Editura Albatros, București, 1972, p. 187.

120. Adriaen Anthoniszoon (1527—1607), olandez din Metz. Valoarea stabilită de el în 1585 a fost publicată de fiul său Adrian Metius în *Arithmeticae et geometriae practica*, apărută în 1611. Metius afirmă că tatăl lui a găsit această valoare folosind metoda lui Arhimede. Se pare că valoarea aceasta fusese aflată mai înainte de către matematicianul german Otto Valentinus, plecînd de la valorile determinate de Arhimede, $\frac{22}{7}$ și Ptolemeu, $\frac{377}{120}$, printr-o simplă scădere, membru cu membru, a celor două fracții: $\frac{377-22}{120-7} = \frac{355}{113}$,

A. P. Iuşkevici: loc. cit. nr. 92, p. 78.

121. François Viète (1540—1604), numit de obicei Vieta. Prima lui lucrare de matematici are ca titlu Canon mathematicus seu ad triangula. Aplicînd procedeul lui Arhimede la poligoane cu $3.2^{17} = 393\,216$ laturi el a stabilit următoarele limite între care se află numărul π

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537.$$

Reputația lui de matematician era binecunoscută. Cînd un ambasador al Olandei, discutînd cu Henric al IV-lea, afirma că Franța nu are un geometru capabil să poată rezolva o problemă propusă de matematicianul belgian Adrian van Roomen în legătură cu rezolvarea ecuației de gradul 45, anume:

$45\,x - 3795\,x^3 + 95634\,x^5 + \ldots + x^{45} = C$, pentru cazul particular în care constanta C are valoarea

$C = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{6} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$, Henric al IV-lea a adus la cunoștința lui Viète această ecuație. El a constatat imediat că necunoscuta era lungimea coardei unui cerc de rază 1, corespunzătoare unghiului la centru $\frac{2\,0}{45°}$, în care $C = 2 \sin 0$ se exprimă prin $x = 2 \sin \frac{0}{45°}$. Aceasta ecuație se obține (ținînd seama că $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$) prin împărțirea unghiului 0, mai întîi în 5 părți egale și apoi, de două ori consecutiv, în cîte trei părți egale. În numai cîteva minute, Viète — care se ocupase cu această problemă și descoperise formula care leagă $\sin n\,0$ de $\sin 0$ și $\cos 0$ — a arătat că ecuația are 23 de rădăcini. În realitate, ecuația fiind de gradul 45, avea 45 de rădăcini, dar celelalte corespundeau valorilor negative ale sinusului iar pe atunci numerele negative nu erau luate în seamă de mulți matematicieni, printre care se afla și Viète. La rîndul lui, Viète a propus, prin ambasador, lui Adrian van Roomen, să construiască un cerc tangent la trei cercuri date, problemă de care s-a ocupat Apollonius într-o lucrare pierdută și reconstituită de Viète. Van Roomen a rezolvat problema folosind intersecția a două hiperbole, dar nu a putut stabili o soluție prin metode elementare, așa cum a găsit-o Viète. Toate acestea l-au impresionat așa de mult pe Roomen încît a făcut drumul pînă la Fontenay-le-Comte, unde se afla atunci curtea lui Henric al IV-lea, ca să-l poată cunoaște personal pe Viète, iar cunoștința s-a transformat într-o strînsă prietenie. Viète este și fondatorul algebrei moderne. El a introdus, cel dintîi, în mod sistematic, literele în locul numerelor necunoscute, punînd astfel bazele notației algebrice și al algebrei simbolice.

122. Adrian Romanus sau van Roomen (1561—1615), a predat matematicile la Louvain. În cartea lui, *Metoda poligoanelor*, se află cea mai exactă determinare de atunci a numărului π.

123. Ludolph van Ceulen (1540—1610). În 1596 a publicat, în limba olandeză, *Fundamente aritmetice și geometrice* și *De circulo*, pe care Snellius a tradus-o în latinește, în 1619.

124. Willebrod Snellius (1581—1626) a succedat tatălui său ca profesor de matematici la Universitatea din Leiden. În lucrarea *Cyclometricus de circuli dimensione*, din 1621, a stabilit formule noi prin care se putea aproxima arcul de cerc, mai precis decît se cunoștea pînă la el. Aceste formule i-au permis să calculeze primele 7 zecimale exacte ale numărului π, cu ajutorul poligonului cu 96 de laturi, acela care îi furni-

zase lui Arhimede numai două zecimale exacte. El a calculat și o tabelă cuprinzînd valorile perimetrelor poligoanelor înscrise și circumscrise unui cerc în care numărul laturilor era dat de formula $10 \cdot 2^n$, unde $n = 3, 4, 5, \ldots, 10$, tabelă necesară pentru a combate rezultatele susținute de unii cuadraturiști.

125. Grégoire de Saint-Vincent (1584—1667). Deși a fost mult criticat din cauza pretenției sale de a fi stabilit cuadratura cercului, Saint-Vincent rămîne în istoria matematicilor printre marii geometri. Era un profund cunoscător al geometriei antice grecești și a aplicat, într-un mod original, metoda lui Arhimede la cuadratura suprafețelor mărginite de arce de curbă. Totodată, el cunoștea și mijloacele, moderne atunci, ale calculului algebric și infinitezimal, așa că, în lucrarea sa se întîlnesc și multe dintre rezultatele obținute, în același timp, de către Descartes. Ca iezuit, a trebuit să ceară autorizație, înainte de a-și publica lucrarea. Trimițînd o copie a ei, ca să fie verificată, referentul, matematicianul Grienberg, succesorul lui Clavius la Colegiul roman, a scris : „Saint-Vincent este un om minunat, egal cu Apollonius, Arhimede și Pappus. Că a descoperit cuadratura cercului, nu mă îndoiesc, dar aceasta înseamnă puțin în comparație cu celelalte descoperiri pe care le-a făcut". Cartea lui a apărut, într-o ediție luxoasă, cu o copertă bogat împodobită de desene și a fost dedicată guvernatorului Țărilor de jos, Arhiducele Leopold de Austria care, desigur, a suportat cheltuielile imprimării. Din această cauză, problema cuadraturii cercului a fost numită pe atunci și problema austriacă.
a). J. Neuberg : *Vie et oeuvre de Grégoire de Saint-Vincent*, Bull. Acad. Roy. de Belgique, Cl. de science, 1911, p. 922.
b). Georges Monchamp *Les correspondances belges du grand Huygens*, Bull. Acad. Roy. de Belgique, Tome 27 (3), 1894, p. 260.
c). Prof. dr. I. E. Hofmann : *Das opus geometricum des Gr. a S. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz*, Abh. Preus. Akad., nr. 13, 1941.

126. Thomas Hobbes (1588—1679), filozof materialist englez. El a „sistematizat materialismul lui Bacon" (K. Marx) Marx a observat că din cauza admirației lui pentru geometrie, în sistemul lui filozofic el a sacrificat mișcarea fizică în favoarea mișcării mecanice, matematice, și a proclamat geometria ca știință de căpetenie. Prin această unilateralitate însă, materialismul lui Hobbes s-a transformat într-un ascetism sui-generis. În realitate, nu geometria, ci cuadratura cercului l-a condus la aceste rătăciri și l-a făcut să poarte polemici înverșunate cu mulți matematicieni renumiți, mai ales cu Wallis. De aceea, în 1662, cînd s-a înființat Royal Society, Hobbes nu a fost ales membru al ei.

127. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716), a venit pentru prima oară la Paris, ca diplomat, în 1672. Aici l-a cunoscut pe Huygens, cea mai înaltă autoritate ştiinţifică a vremii. Newton îl numise „Summus Huygenius". Deşi pe atunci el avea numai 26 de ani şi nu se făcuse cunoscut nici ca filozof şi nici ca matematician, Leibniz a devenit elevul şi prietenul lui Huygens. Mai tirziu, el a amintit de multe ori că datoreşte cunoştinţele lui de geometrie lui Huygens, de pildă, în scrisoarea pe care a trimis-o în 1703 lui Jacob Bernoulli. În matematici, pe lîngă descoperirea calculului diferenţial, făcută în acelaşi timp cu Newton, dar independent de el, Leibniz a mai pus bazele calculului probabilităţilor şi a teoriei combinatorii. În domeniul logicii, el a fost un precursor al gînditorului ceh Bolzano, care a pus bazele logicii matematice. Leibniz are descoperiri remarcabile atît în geometrie cît şi în algebră, manifestînd totodată un interes deosebit pentru tehnică. A construit o maşină de calculat, prima care făcea şi înmulţiri (pentru adunare, prima maşină a construit-o Pascal) şi se pare că tot el a sugerat lui Papin ideea principală a maşinii cu aburi. În filozofie, deşi iniţial s-a manifestat ca un admirator a lui Descartes, mai tîrziu şi-a creat un sistem filozofic propriu, idealist-obiectiv.
Christian Huygens (1629—1695), născut la Haga, a fost fizician, astronom şi matematician. În 1651 a publicat *Exetatis quadratura circuli*, unde a stabilit greşeala pe care a comis-o Saint-Vincent la teoremele sale legate de cuadratura cercului. Huygens a aplicat numai metodele sintetice ale geometriei euclidiene în toate demonstraţiile şi descoperirile sale geometrice, cu toate că a cunoscut şi noile descoperiri ale lui Descartes şi Cavalieri. De aceste metode analitice s-a folosit însă numai în problemele privind măsurarea arcului de parabolă cubică, cicloidă sau cisoidă. Cea mai importantă lucrare a lui rămîne *Horologium Oscillatorium*, publicată în 1673, în care a dezvoltat, alături de problemele de fizică şi mecanică cerute de teoria pendulului, multe şi importante capitole din teoria curbelor. În ea se pun bazele construcţiei mecanismului de ceasornic cu pendul, instrument absolut necesar în observaţiile astronomice şi în viaţa socială.
a). C. I. Gerhart: *Leibnizens mathematischen Schrifte*, Bd. I, II, Berlin, 1850,
b). *Istoria filozofiei*, loc. cit., vol. I, p. 390.
c). Christian Huygens: *Oeuvres complètes*, vol. VII, p. 244 şi p. 393, vol. VIII, p. 214.

128. O *serie* sau o *sumă infinită de termeni* se poate scrie atunci cînd se cunoaşte legea de formare a termenilor ei, de obicei exprimată prin termenul general. De pildă, în cazul seriei lui Lebniz, legea de transformare a termenilor este dată de formula:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{unde } n = 0,1,2 \ldots$$

Într-o asemenea expresie: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, operația de *adunare algebrică* nu mai păstrează sensul ei obișnuit, de la adunarea unui *număr finit* de termeni, fiindcă suma se aplică la un *număr infinit* de termeni. În *Analiza matematică* a fost *definită* această nouă operație matematică și numai atunci cînd condițiile cerute de definiție sînt îndeplinite, se spune că *seria este convergentă* și *are o sumă*. Dacă seria este *divergentă*, atunci termenii ei *nu se pot aduna*. Faptul că se stabilește convergența unei serii nu conduce însă și la găsirea posibilității efective de a-i cunoaște suma. De cele mai multe ori, nu se poate găsi o metodă de a calcula suma unei serii convergente și în aceste cazuri se procedează la găsirea *unei valori aproximative* a ei, făcîndu-se suma unui *număr finit de termeni*, în ordine succesivă, începînd de la primul termen, și apoi se calculează limitele între care se află eroarea comisă, oprindu-se suma la acel număr de termeni. Fiindcă în orice serie convergentă termenii ei sînt descrescători și se apropie de zero, numărul termenilor însumați depinde de natura seriei, anume el descrește dacă termenii seriei se apropie repede de zero. O asemenea serie se mai numește și *repede convergentă*. Seria descoperită de Leibniz era cunoscută de hinduși cu mult mai înainte. Ea apare în scrierea matematicianului hindus Nilakante[1], denumită *Culegere științifică*, redactată între 1501—1502.

120. Scrisoarea lui Leibniz către Huygens, din 9 septembrie 1679, precum și aceea ale lui Leibniz către Oldenburg și către Galloys din 2 septembrie 1675 (loc. cit. nr. 127 a).

130. John Pell (1610—1687). În 1643 a venit din Anglia la Amsterdam și, după un an, a fost numit profesor la Universitatea de aici. Din 1646 a trecut ca profesor la celebra școală din Breda și, cu această ocazie, a devenit profesorul particular al lui Christian Huygens. A combătut cuadratura propusă de Longomontanus, într-o carte pe care a scris-o în limba engleză și a publicat-o în 1646, iar în anul următor a tradus-o și în latinește. A murit la Londra, într-o sărăcie de nedescris (loc. cit. 127 c, vol. I, p. 14).

131. Nicolaus Mercator (1620—1687). Cea mai importantă lucrare a sa este *Logarithmotechnia*, tipărită în 1667. Aici el a stabilit o expresie care permite calcularea ariei hiperbolei raportată la asimptote, cu ajutorul următoarei serii infinite:

---

[1] A. P. Iușkevici: *Istoria matematicii în evul mediu*, loc. cit., p. 175.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

A murit în mizerie, la Paris, unde, după ce a executat desenele şi a construit fîntînile de la Versailles, nu i s-au plătit banii cuveniţi.

132. În decursul veacurilor XVI şi XVII, matematicienii îşi comunicau unii altora descoperirile, prin scrisori. Acele scrisori nu aveau, ca în zilele noastre, un caracter particular, ci erau copiate şi difuzate astfel ca toţi cei ce se interesau de problema respectivă să aibă cunoştinţă de noile rezultate. Se practica această metodă deoarece revistele în care se publicau articolele matematice erau rare şi greu de procurat.

James Gregory (1638—1675), remarcabil matematician şi fizician englez, a rivalizat cu Newton în construirea telescopului cu reflexie. În lucrarea sa, *Vera circuli et hyperbolae cuadratura*, tipărită în 1667, se găsesc dezvoltările în serie ale funcţiilor tg x şi ctg. x. Totodată, se atrage atenţia că atunci cînd se face suma unei serii, trebuie să se ţină seama de natura ei (adică de convergenţa seriei), fapt neluat în seamă de mulţi matematicieni celebri, deoarece pe atunci abia se puneau bazele teoriei seriilor. În 1671 a stabilit dezvoltarea în serie a funcţiei arc tg x. În legătură cu cuadratura cercului, Gregory a generalizat metoda lui Arhimede prin aceea că el nu a mai folosit, în determinarea numărului π, *lungimea arcului de cerc* cuprinsă între laturile poligoanelor regulate, înscrise şi circumscrise cercului, ci aria sectorului de cerc cuprinsă între *ariile sectoarelor poligonale* respective. În acest scop, el a stabilit următoarele relaţii:

$$A_{2n} = \sqrt{A_n \cdot B_n} \quad \text{şi} \quad B_{2n} = \frac{A_n \cdot B_n}{A_{2n} + B_n}$$

unde A_n reprezintă aria sectorului poligonal regulat înscris în cerc iar B_n este aria sectorului unui poligon regulat circumscris acelui cerc. El a mai demonstrat că formulele stabilite rămîn valabile şi în cazul secţiunilor conice. Prima dintre formulele găsite de Gregory fusese stabilită mai înainte de Jordanus Nemorarius şi apoi de Snellius, dar faptul nu a fost cunoscut de Gregory. Folosind aceste formule, el a susţinut *imposibilitatea cuadraturii cercului şi a hiperbolei*, arătînd că legea prin care se formează termenii şirurilor infinite:
$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ şi $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$ care au ca limită aria sectorului de cerc, este de aşa natură, încît, aceste şiruri nu posedă un *ultim termen*, aşadar, aria sectorului de cerc (sau de hiperbolă) *nu se poate exprima*, în mod analitic, printr-o formulă cu un *număr finit* de termeni. Huygens a combătut, *pe nedrept*, această demonstraţie şi de aici a început ceartа lor. Observaţiile lui Huygens se găsesc publicate în

Journal des Savants, începînd cu nr. 2 din 1668 iar răspunsurile lui Gregory au apărut în *Transaction of London Royal Society*, din acelaşi timp.
F. G. Teixeira: *Traité des courbes speciales*, T. III, 1915, p. 375.
Georg Heinrich: *James Gregory Vera circuly*, Bibl. Math. II (3), 1901, p. 77.

133. Scrisorile care cuprind polemica Huygens-Gregory se găsesc şi în *Operele complete* ale lui Huygens (loc. cit. 1270, vol. VI, p. 272.)

134. M. de Fontenelle: *Éloges historiques des academ.*, vol. I, p. 510: Leibniz.

135. Marin Mersenne (1588—1648). Prieten cu Descartes şi cu aproape toţi oamenii de ştiinţă din vremea lui, Mersenne era renumit ca animator al vieţii ştiinţifice. „Chilia sa", — spunea Thomas Hobbes —, „este de preferat tuturor şcolilor de filozofie". Se cunosc 138 de scrisori cu conţinut ştiinţific adresate de Descartes acestui celebru călugăr franciscan. Scrisoarea se află în loc. cit. 127 c, vol. I, p. 53.

136. Operaţia pe care Grégoire de Saint-Vincent a numit-o *ducere planum in planum* constă în stabilirea unei metode de a calcula volumul mărginit de o suprafaţă curbă, folosindu-se poliedre înscrise şi circumscrise, adică analog cu ceea ce a făcut Arhimede în cazul suprafeţelor plane. O deosebită valoare prezintă teorema pe care a stabilit-o el în legătură cu egalitatea ariilor a două benzi de hiperbolă, teorema care a condus la găsirea proporţionalităţii acestor arii cu logaritmul raportului dintre unele segmente definite de aceste benzi (loc. cit. 127 c, XI, p. 278.)

137. Franz van Schooten (1615—1660) profesor de matematici la şcoala de ingineri din Leiden, din 1646. A fost profesorul de matematici al lui Ch. Huygens.

138. În cartea lui Grégoire de Saint-Vincent există patru demonstraţii diferite prin care autorul caută să stabilească cuadratura cercului. Prima dintre aceste demonstraţii, care a fost combătută de Huygens, se bazează pe următoarele două teoreme demonstrate de Saint-Vincent în cartea sa:
Cuadratura cercului este posibilă dacă sînt satisfăcute condiţiile:
1) să se poată construi două arce de cerc CD şi EF ale căror proiecţii III şi KL pe un acelaşi diametru, să fie egale şi să fie comensurabile între ele şi cu cercul dat (fig. 26);
2) să se ştie cum se construieşte raportul ariilor $CDIH$ şi $EFLK$.
În adevăr, dacă aceste două condiţii ar fi îndeplinite, notînd cu

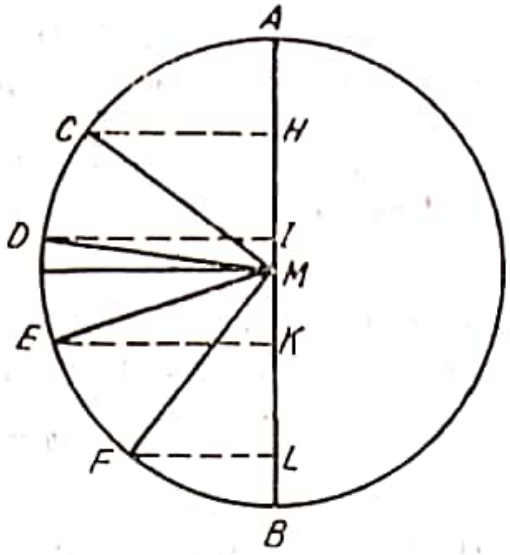


Fig. 26

$p\sigma$, $q\sigma$ și $r\sigma$ ariile cercului întreg și ale sectoarelor DMC și FME, proporționale, respectiv, cu cercul și arcele DC și EF, am avea :

$$\frac{\text{aria } CDIH}{\text{aria } EFLK} = \frac{\text{sect. } DMC + \text{tr. } CMH - \text{tr. } DMI}{\text{sect. } EMF + \text{tr. } FLM - \text{tr. } EMK} =$$

$$= \frac{q\sigma + \text{tr. } CMH - \text{tr. } DMI}{r\sigma + \text{tr. } FIM - \text{tr. } EMK} = \frac{m}{n}.$$

Această ultimă egalitate ar permite să se calculeze și să se construiască măsura comună σ a cercului și a sectoarelor și deci aria cercului. Dar Huygens a arătat că aceasta nu este posibil.

139. Gilles Francon de Gottingnies, elev al lui Saint-Vincent, fiind la Roma în 1650, a asistat la următoarea scenă : Ceasornicarul papei a construit o pendulă după descrierea pe care a dat-o Huygens în cartea sa și a prezentat-o acestuia drept propria sa invenție. Încîntat de realizare, papa a invitat pe toți matematicienii din Roma să asiste la prezentarea pe care o va face ceasornicarul. El ascunsese cu dibăcie mecanismul, așa că nu se puteau vedea decît oscilația pendulului și mișcarea acelor pe cadran. Toți cei prezenți erau încîntați de această descoperire și se grăbeau să prezinte ceasornicarului felicitări cînd Gilles, care era de față, a întrerupt această manifestație arătînd că adevăratul inventator al mecanismului de orologerie este Christian Huygens și nu ceasornicarul.

140. P. Janet : *Oeuvres philosophiques de Leibniz: Essais de Théodicée*, vol. II, Paris, 1866, p. 56.

141. Iată o construcție dată de Huygens, în 1654, în *De circuli magnitudine*, construcție care se folosește și azi pentru aproximarea lungimii unui

are de cerc atunci cînd aceasta trebuie făcută în mod grafic: Dacă AB' este arcul ce trebuie rectificat, atunci se prelungeşte diametrul AC cu o lungime egală cu raza cercului pînă în D. Dreapta DB' taie pe tangenta în A segmentul $AB \simeq$ arc AB' (fig. 27). Această *metodă geometrică* nu este altceva decît traducerea formulei analitice de aproximare a arcului de cerc, stabilită de N. Cusanus (nota nr. 167). H. Titze: *Gelöste und ungelöste mathem. Probl.*, vol. I, p. 107 şi 220.

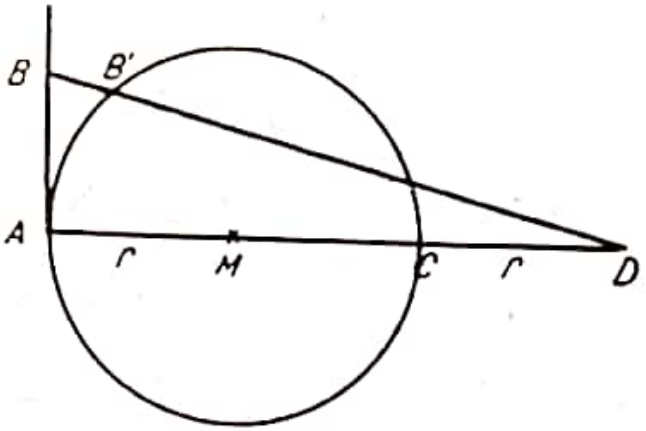


Fig. 27.

142. Pentru ca să poată găsi acele 0 zecimale ale lui π, aproximînd aria cercului numai cu un poligon cu 6 laturi, Huygens a stabilit, în prealabil, o teoremă prin care dovedea că lungimea 0 a unui arc de cerc, se află cuprinsă între următoarele valori:

$$\sin^2 0 \operatorname{tg} 0 < 0 < \frac{8 \sin \frac{0}{2} - \sin 0}{3}.$$

Aceste valori restring mai multe limite între care se găseşte raportul dintre lungimea cercului şi perimetrul poligonului înscris, decît acelea corespunzătoare inegalităţii stabilită de Arhimede, şi care se traduce prin inegalitatea trigonometrică ce a fost amintită $\sin 0 < 0 < \operatorname{tg} 0$.

143. Euler regăseşte formula lui Viète, scrisă sub formă trigonometrică, folosind metodă izoperimetrelor, care poartă această denumire din cauză că se calculează raza şi apotema unui poligon regulat cu $2n$ laturi în funcţie de raza şi apotema unui poligon regulat cu n laturi, avînd *acelaşi perimetru*. Aceste formule apar din teorema: „Dacă a_n şi b_n sînt razele cercurilor înscrise şi respectiv, circumscrise unui poligon regulat cu n laturi de perimetru dat P, iar a_{2n} şi b_{2n}[1] razele cercurilor înscrise şi respectiv circumscrise poligonului cu $2n$ laturi, de acelaşi perimetru P, atunci există relaţiile

[1] a_n este şi apotema poligonului circumscris cercului.

(1) $$a_{2n} = \frac{a_n + b_n}{2}; \qquad b_{2n} = \sqrt{\frac{b_n(a_n+b_n)}{2}}.$$

Ca să aplice această teoremă la calcularea numărului π, el a considerat, mai întîi, pătratul de latură $\sqrt{2}$. În acest caz: $a_4 = 1$, $b_4 = \sqrt{2}$, $P = 4\sqrt{2}$ și deci, razele cercurilor înscrise și circumscrise poligonului regulat de perimetru 8, avînd o dată, $4 \cdot 2 = 8$ laturi și a doua oară $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ laturi, se obțin din șirul de egalități:

(2) $$a_8 = \frac{a_4 + b_4}{2}; \qquad b_8 = \sqrt{\frac{b_4(a_4 + b_4)}{2}};$$

$$a_{16} = \frac{a_8 + b_8}{2}; \qquad b_{16} = \sqrt{\frac{b_8(a_8 + b_8)}{2}}$$

sau, în general, notînd cu $a_t = a_1 \cdot 2^t$ și cu $b_t = b_4 \cdot 2^t$, avem

$$a_t = \frac{a_{t-1} + b_{t-1}}{2}; \qquad b_t = \sqrt{\frac{b_{t-1}(a_{t-1} + b_{t-1})}{2}}.$$

În formă trigonometrică, aceste rezultate se exprimă astfel: numind 0 unghiul la centru corespunzător laturii poligonului regulat înscris cu n laturi, atunci

$a_n = b_n \cos\frac{0}{2}$ și $a_{2n} = b_{2n} \cos\frac{0}{4}$. Înlocuind în formulele (1) se obține $a_{2n} = b_n \cos^2\frac{0}{4}$; $b_{2n} = b_n \cos\frac{0}{4}$. Dacă poligonul primitiv este pătratul înscris cercului de rază 1, atunci $0 = \frac{\pi}{2}$ și $b_4 = \sqrt{2}$ deci $a_8 = b_4 \cos^2\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}\cos^2\frac{\pi}{8}$; $b_8 = b_4 \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ iar din formulele (2) se obțin:

$$a_{16} = \frac{b_4 \cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + 1\right)}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{16};$$

$$b_{16} = \sqrt{b_8}\sqrt{a_{16}} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}$$

și, în general, ținînd seama că $\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$, avem:

$$a_t = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^{t-1}}\cos^2\frac{\pi}{4\cdot 2^t}$$

$$b_i = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^{i-1}}\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^{i}}.$$

Cînd numărul laturilor creşte nedefinit, adică $i \to \infty$, raza cercului R, a cărui lungime este egală cu perimetrul pătratului ($P = 4\sqrt{2}$), este:

$$R = b_\infty = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\ldots,$$

dar lungimea cercului este $2\pi R = 4\sqrt{2}$. De aici rezultă $\frac{2}{\pi} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ sau $\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots$

144. Adrien Marie Legendre (1752—1833). Cele mai importante lucrări ale sale sînt legate de teoria numerelor şi studiul anumitor funcţii speciale. Cartea de geometrie pe care a publicat-o în 1794, *Elemente de geometrie*, tipărită la Paris, a avut o mare popularitate şi foarte multe ediţii. De asemenea, a fost tradusă în multe limbi. La noi în ţară ea a fost tradusă în anul 1837 de către Petrache Poenaru şi a fost tipărită în tipografia lui Eliade Rădulescu „cu cheltuiala din Casa Şcoalelor Naţionale". În această carte se găsesc demonstraţiile asupra iraţionalităţii numerelor π şi π^2, care au fost stabilite atunci de Legendre.

145. Noţiunea de limită a unei mărimi variabile este temelia pe care s-a clădit calculul diferenţial şi integral sau capitolul din matematici ce poartă numele de *Analiza matematică*. Noţiunea de mărime variabilă este folosită, în mod curent, aşa că ea nu are nevoie de explicaţie; tot aşa şi expresia: *o mărime variabilă tinde către o limită*. Însă, abia cînd această expresie din limbajul obişnuit a putut fi încadrată într-o *definiţie matematică precisă*, ea a putut fi folosită ca instrument de cercetare. Iată una dintre definiţiile mai uşor de înţeles: „dîndu-se o mărime variabilă x, se spune că numărul A fix, este limita dintre care tinde variabila x (într-un mod oarecare, ce nu-i necesar să fie specificat) dacă, dîndu-se un număr pozitiv şi oricît de mic ε, există o valoare a lui x cuprinsă în procesul de variaţie a lui x în aşa fel încît modulul diferenţei dintre x şi A să poată fi făcut mai mic decît numărul ε, arbitrar ales şi oricît de mic, această diferenţă continuînd să rămînă mereu mai mică decît ε: $\lim x = A$ dacă $|x - a| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

146. John Wallis (1610—1703) a fost un admirator al matematicienilor greci şi chiar a editat o parte din operele lui Arhimede, Eutocius, Ptolemeu şi Aristarh. A publicat *Arithmetica infinitorum sive nova methodus*, în 1655 şi *De Algebra tractatus, historicus et practicus*, în 1673. Deosebit de interesantă este metoda prin care Wallis a stabilit

expresia produsului său infinit. El a ajuns la această expresie calculînd aria cuprinsă între axa abscisclor și a ordonatelor, corespunzătoare valorilor $x = 0$ și $x = x$ (fig. 28) în cazul curbelor care au, respectiv, ecuațiile:

$y = (1 - x^2)^0 = 1$, $y = (1 - x^2)$; $y = (1 - x^2)^2$; $y = (1 - x^2)^3$ ...

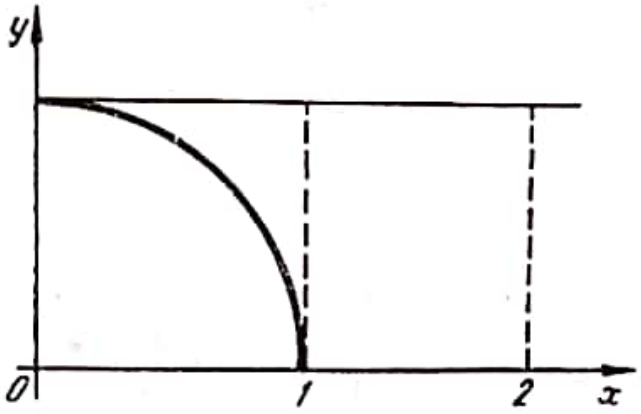


Fig. 28

Toate aceste arii se pot exprima în funcție de dreptunghiul circumscris lor, avînd ca dimensiuni x și y și anume prin următoarele expresii ce reprezintă termenii unor serii; acești termeni depinzînd de n.

Pentru:

$n = 0$, aria este x;

$n = 1$, aria este $x - \frac{1}{3} x^3$

$n = 2$, aria este $x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5$;

$n = 3$, aria este $x - \frac{3}{3} x^3 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7$.

Dacă $x = 1$, aceste valori devin, respectiv: $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \cdots$

Fiindcă ordonata unui cerc este $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ iar exponentul $\frac{1}{2}$ este valoarea medie între 0 și 1, problema cuadraturii cercului se reduce la următoarea: cunoscîndu-se o anumită lege, exprimată printr-o formulă matematică depinzînd de n care pentru $n = 0,1,2,3, \ldots$ ia valorile $1, \frac{2}{3}, \frac{48}{105}$, ce valoare va lua formula dacă $n = \frac{1}{2}$?

Wallis a căutat să obțină această valoare printr-o metodă imaginată de el, care azi se numește *metoda interpolării* și a devenit un instrument important în calculele aproximative. În felul acesta a ajuns la expresia produsului infinit: $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots}{1.3.3.5.5.7 \ldots}$

Wallis a întîmpinat mari greutăţi ca să găsească acest produs fiindcă atunci nu era încă stabilită formula binomului pentru exponenţii fracţionari şi nici notaţiile moderne folosite azi. Se pare că tocmai aceste cercetări ale lui Wallis i-au sugerat lui Newton studiul lui asupra dezvoltării binomului.

147. Cînd Wallis a obţinut expresia lui π sub formă de produs infinit, faptul i s-a părut foarte curios şi a rugat pe prietenul său, lordul W. Brouncker (1620—1684) să verifice calculele. După ce a făcut-o, Brouncker a stabilit şi el o nouă expresie a lui π sub forma unei *fracţii continue*.

148. Dezvoltarea în fracţii continue a fost cunoscută de greci şi de hinduşi. Ea a servit şi ca mijloc de calculare a rădăcinii pătrate dintr-un număr, anume considerîndu-se

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{\cdots}}}}$$

În Europa occidentală, prima dezvoltare în fracţie continuă apare în *Algebra* lui Raffaello Bombelli din 1572. Dar acesta nu a dat o regulă generală de formare a fracţiilor continue, ca aceea arătată mai sus, ci a calculat doar $\sqrt{13}$, în felul următor:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{+ \cdots}}}$$

În *Geometria practică* a lui Clavius, publicată în 1606, se stabileşte procedeul de transformare a unei fracţii în fracţie continuă. *Teoria fracţiilor continue* a fost însă formulată, pentru prima oară, de către Leonard Euler (nota nr. 156) în 1737, în lucrarea ce poartă chiar acest titlu: *De fractionibus continuis*. El a arătat că orice *număr raţional* poate fi reprezentat sub forma unei *fracţii continue finite*. Rezultă că, de la această dată ar fi existat argumente temeinice să se considere că numărul π este *un număr iraţional*, ţinînd seamă de dezvoltarea găsită de Brouncker a numărului π în *fracţie continuă infinită*, dacă s-ar fi dovedit şi reciproca teoremei, anume că orice fracţie continuă infinită reprezintă un număr iraţional. Dar teoria numerelor iraţionale se va stabili mai tîrziu, tocmai pornind de la aceste probleme puse de geometrie. Demonstraţia formulei lui Brouncker a dat-o tot Euler, în 1785, în cartea *Opuscula analitica*,

vol. II, p. 140. În volumul I al acestei cărți se găsesc și celelalte două fracții continue menționate.

149. O serie infinită este o expresie de forma: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, unde a_n se numește termenul general fiindcă din el se pot obține toți termenii seriei dacă în expresia specifică a lui $a_n = f(n)$ se dă pe rînd lui n valorile 1, 2, 3 ... Dacă a_n este un număr, atunci seria este numerică dacă a_n este o funcție (de pildă, puterile unei variabile x), atunci seria este o serie de funcții (de pildă, o serie de puteri). Ne amintim că Arhimede a folosit, pentru prima dată, o serie de puteri (progresia geometrică infinită): $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ unde $q = \frac{1}{4}$, ca să calculeze cu ea aria segmentului de parabolă. De atunci, nimeni în Europa nu s-a mai ocupat de serii pînă în secolul al XVII-lea. Abia atunci, cînd Kepler (1571—1630) a vrut să stabilească legile mișcărilor planetelor în jurul Soarelui și, în acest scop, avea de determinat aria unui sector de elipsă, el a considerat această arie formată *„dintr-o infinitate de raze"*, anticipînd astfel metoda folosită în calculul integral. Mai tîrziu, Bonaventura Cavalieri (1598—1647), elev al lui Galileu și profesor de matematici la Universitatea din Bologna, a imaginat o metodă, rămasă celebră, a indivizibililor, care are la bază dezvoltarea ideilor lui Kepler și aplicarea lor în cazul lungimii unui arc de curbă. În cartea sa, *Geometria indivisibilibus*, din 1635, el considera linia compusă dintr-un număr infinit de puncte și află lungimea liniei prin însumarea acestor *indivizibili*. Kepler și Cavalieri sînt considerați ca precursorii calculului integral și, totodată, ei trebuie priviți ca primii matematicieni care au calculat raportul dintre lungimea cercului și diametrul său cu ajutorul unei serii, a cărei sumă reprezenta lungimea unui arc de cerc în funcție de rază și unghiul la centru subîntins de arc. Proprietatea seriilor de puteri, de a se prezenta ca un poligon algebric infinit, a trezit interesul matematicienilor din secolul al XVII-lea, mai ales după ce James Gregory și totodată Isaac Newton stabiliseră seriile funcțiilor arcsin x și arctg x.

150. Thomas F. de Lagny (1660—1734) s-a ocupat de diferite probleme de algebră și geometrie. El avea pasiunea calculelor și a scris o carte cuprinzînd metode practice de rezolvare a problemelor. Într-un memoriu, publicat în 1719, el a prezentat 127 de zecimale ale numărului π Tot acolo, el a enunțat teorema despre valorile raționale și iraționale ce le poate lua tangenta unui arc, și anume, a arătat că *tangenta oricărui arc rațional este un număr irațional și invers, orice arc cu tangenta rațională este irațional.* Această teoremă va juca un rol deosebit în stabilirea iraționalității numărului π (vezi și nr. 155).

151. Începînd din secolul al XVII-lea și continuînd în secolul al XVIII-lea, seriile de puteri au ținut loc de frunte în cercetările matematicienilor fiindcă, prin ele, funcții complicate, ca acelea trigonometrice directe sau inverse, legate de studiul numărului π, se puteau exprima, în mod aproximativ, cu ajutorul polinoamelor cu coeficienți raționali. Prin aceasta, se spera să se găsească un mijloc de a sonda natura numărului π. Între 1689 și 1704, Jacob Bernoulli a sistematizat teoria seriilor infinite, în cinci articole intitulate: *Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita*[1]. În aceste articole s-au strecurat însă și cîteva greșeli care proveneau din faptul că anumite serii divergente erau considerate a fi convergente. Pe atunci, această confuzie era făcută în mod curent, chiar și de către marii matematicieni. Însuși Euler a fost amăgit uneori deși, din întîmplare sau din noroc, rezultatele importante pe care le-a stabilit în legătură cu seriile ce nu erau convergente, s-au dovedit exacte. Neexistînd încă o teorie riguroasă asupra convergenței unei serii, iar seriile devenind un fel de modă sau de pasiune a matematicienilor din secolul al XVIII-lea, rezultatele absurde la care se ajungea, căutau să le explice filozofic. Așa, de pildă, Euler considera că seria divergentă : $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ are ca sumă pe $\frac{1}{2}$ căci, spunea el, considerînd un număr par de termeni, suma este zero, iar considerînd un număr impar, suma este 1, așadar, făcînd media dintre 1 și 0 rezultă $S = \frac{1}{2}$, rezultat *absolut greșit* fiindcă această serie este divergentă și *nu are sumă*. Semnalul *scandalului seriilor divergente* l-a dat N. Abel (1802—1829) care scria în 1826 : „seriile divergente sînt, în totalitatea lor, o invenție a diavolului". Era o caracterizare a haosului ce-l provocase abuzul de asemenea serii folosite fără nici un discernămînt, abuz ce provenea din cauză că se încerca să se aplice *regulile ce se foloseau în cazul sumelor finite de termeni* și la *sumele infinite*. Or, această însumare nu se poate face înainte de a stabili, după criterii precise, dacă seriile sînt convergente sau nu.

152. Isaac Newton (1642—1727). Lucrările lui Newton au avut o influență neasemuit de mare în dezvoltarea științelor matematice și fizice. Pe lîngă numeroase și importante descoperiri, cele două mari probleme de care este legat numele lui Newton sînt *descoperirea calculului diferențial* și *legea gravitației universale*. Calculul diferențial a fost descoperit, totodată, și de G. W. Leibniz. Discuția pentru prioritate a durat vreme îndelungată și a amărît ultimii ani ai vieții lui Leibniz.

---

[1] Propoziții aritmetice despre seriile infinite și despre sumele lor finite.

153. Abraham Sharp (1651—1742) era contabil pe cînd l-a descoperit astronomul Flamsteed și l-a chemat la Observatorul din Greenwich. Alături de Flamsteed, A. Sharp a lucrat la catalogul celor 3 000 de stele și a construit tabele de logaritmi, de sinus și de tangentă, publicate în 1717. El a calculat cele 72 de zecimale ale numărului π, folosind tabelele sale de logaritmi.

154. Astronomul John Machin (1680—1751) a observat că *orice arc de cerc, care are tangenta trigonometrică exprimată printr-un număr rațional, se poate împărți* în două arce ale căror tangente sînt și ele raționale. Faptul apare din formula care exprimă tangenta sumei a două arce sau din aceea care corespunde la suma arcelor a două tangente: $\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$. Aplicînd această formulă de mai multe ori consecutiv, el a stabilit relația:

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Dezvoltînd fiecare dintre funcțiile $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ și $\operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ în serie, după formula stabilită de Gregory, Machin a găsit următoarea serie care exprimă numărul π:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right)$$

Prin această serie a putut calcula primele 100 de zecimale ale lui π. Seria a fost publicată, în 1706, de către W. Jones în *Synopsis palmariorum matheseus* fără însă a se arăta cum a fost stabilită de către Machin. În această lucrare, W. Jones a folosit *pentru prima oară notația* π ca să însemne raportul dintre lungimea cercului și diametrul lui. Dar, atunci această notație a trecut neobservată, circulînd alături de alte notații. De pildă, W. Oughtred însemna acest raport (1647) prin $\frac{\pi}{\delta}$, cele două litere fiind, desigur, inițialele cuvintelor *periferie* și *diametru*. Această notație a fost adoptată de Isaac Barrow (1664) și de către alți matematicieni. Unii însă, ca Moivre, însemnau acest raport prin $\frac{c}{d}$. Notația curentă, aceea a literei π, a fost adoptată abia prin 1734, după ce Euler a început să o folosească în lucrările sale. Din 1736 această literă a fost folosită de Euler și în scrisorile pe care le trimitea prietenilor săi, Goldbach și fraților Bernoulli, iar din 1784 în cartea sa *Introductio in analysis infinitorium*. De la această dată, toți matematicienii au notat numai cu litera π raportul dintre cerc și diametru.

F. Cajori: *A history of mathematical notations*, 1929, vol. II, p. 8.

155. Thomas de Lagny a calculat cele 127 de zecimale folosind tot formula lui Sharp. Acestea au fost publicate în Mém. Acad. Paris din 1719 și sînt următoarele:

= 3,14159	26535	89793	23846	26433	83279
50288	41971	69399	37510	58209	74944
59230	78164	06286	20899	86280	34825
34211	70679	82148	08651	32723	06647
09384	46 ...			(8)	

Despre Lagny se povestește că atunci cînd a intrat în comă, a fost chemat la căpătîi matematicianul Maupertuis cu care era prieten bun. Acesta, apropiindu-se de el, l-a întrebat: Care este pătratul lui 12? Lagny și-a revenit pentru o clipă, a răspuns 144 și a murit. D.E. Smith: loc. cit. nr. 85. vol. I, p. 472.

156. Leonard Euler (1707—1783) a fost nu numai cel mai mare matematician din timpul său, ci și unul dintre savanții universali și, în plus, un calculator desăvîrșit. „Euler calcula fără nici un efort aparent, așa cum respiră oamenii, cum vulturii planează în vînt" a spus Arago despre el. Din 1730 a fost ales membru al Academiei din Petersburg și a lucrat mult la dezvoltarea ei. În 1735, din cauza surmenajului a pierdut ochiul drept. „Voi avea mai puține distracții", a spus el, și a continuat să lucreze cu aceeași intensitate. În 1766 a pierdut și celălalt ochi, tot din cauza oboselii. Fără să se plîngă, și-a continuat cercetările pînă la sfîrșitul vieții, dictînd lucrările fiului său. El a fost creatorul expresiilor moderne din analiză, pe care a considerat-o ca o ramură aparte a matematicilor. Pe lîngă cele peste 900 de memorii a mai publicat numeroase tratate care au servit ca manuale în universități și a rămas un număr imens de manuscrise care încă nu au fost publicate. Pentru dezvoltarea lui π în serie, Euler a reluat metoda lui Machin, stabilind noi expresii, și mai repede convergente decît aceea pe care a găsit-o Machin, ca de pildă:

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \text{ sau:}$$

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \cdots\right).$$

În amîndouă parantezele, termenii se micșorează așa de repede încît considerînd numai cîte 7 termeni în fiecare dintre ele, eroarea comisă este mai mică decît $\frac{1}{186\,000\,000}$, dacă se consideră $r = 1$.

Această serie a fost publicată de Ch. Hutton (1737—1776) în 1776 și de Euler în 1779. Atît Hutton cît și Euler au mai stabilit și altă formulă comodă pentru calcularea numărului π, anume:

$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{79}$. Cu această formulă, Euler, a calculat, numai într-o oră, primele 20 de zecimale ale lui π.

Th. Vahlen: *Konstruktionen und Approximationen*, 1911, p. 258.
E. T. Bell: *Les grands mathématiciens*, Payot, Paris, 1961, p. 154.

157. În 1789, C. F. Vega (1756—1802), autorul celor mai răspîndite tabele logaritmice și trigonometrice, a stabilit formula:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7},$$

ajungînd astfel să calculeze 143 de zecimale, deși s-a stabilit în urmă, la verificarea lor de către Euler, că nu toate erau exacte. Nu acest fapt prezintă acum cel mai mare interes, ci acela de a vedea, mai îndeaproape, mecanismul de stabilire a acestei mulțimi de formule de către Euler, Huton, Vega etc.

Cea mai mare parte din aceste formule au fost stabilite pornind de la identitatea:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \operatorname{arctg} \frac{1}{a+b} + \operatorname{arctg} \frac{1}{a+c}, \text{ unde } a^2 + 1 = bc.$$

pentru $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$ se obține formula Euler-Hutton etc.
Pe de altă parte, pornind de la o altă identitate, anume:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{a} - \operatorname{arctg} \frac{1}{b} \right) + \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{b} - \operatorname{arctg} \frac{1}{c} \right) + \cdots =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{b-a}{ab+1} + \operatorname{arctg} \frac{c-b}{bc+1} + \cdots,$$

Euler a obținut:

pentru $a = 1, b = 3, c = 5, \ldots$: $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{2}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{16} + \operatorname{arctg} \frac{2}{36} + \cdots$

pentru $a = 1$, $b = 2$, $c = 3, \ldots$: $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13} + \cdots$

158. *Dictionnaire encylopédique des mathématiques, par MM. d'Alembert* etc., Paris, 1780, vol. II, p. 687. Aceste 4 volume (din care unul cu planșe), cuprinzînd numai problemele de matematici, au fost extrase

din *Dicționarul enciclopedic* în 28 de volume, publicat între 1751—1772 de către D. Diderot, d'Alembert ș.a., după moartea lui d'Alembert (1783).

150. Către sfîrșitul veacului al XVII-lea și începutul celui de al XVIII-lea geometria diferențială a fost cunoscută sub numele de *Geometria sublimă*. În *Dicționarul enciclopedic matematic*, vol. III, p. 74, se află următoarea notă: „Geometria sublimă sau transcendentă este numele care se dă în particular geometriei infinitezimale sau a infiniților mici. Aceste expresii îmbătrînesc din zi în zi. Gustul pentru matematici este așa de răspîndit, încît cercetările de geometrie nu mai sînt privite acum ca transcendente și mai ales ca sublime, accentuînd că se folosește calculul diferențial și integral".

160. Jean le Ronde d'Alembert (1717—1783). Despre el, Joseph Bertrand a scris: „Numele lui d'Alembert amintește geometrilor pe emulul lui Clairaut și Euler, predecesorul lui Lagrange și Laplace, succesorul lui Huygens și Newton; d'Alembert este, printre literați, oratorul spiritual a cărui elocvență a fost, timp de un secol, pentru cele două Academii, cea mai mare atracție a ședințelor solemne". În memoriile lui Marmontel [1], este descrisă lupta de la Academie dintre filozofi (Duclos, d'Alembert, Watelet și Saurin) și din grupul academicienilor susținuți de Curte, din 1763, cu prilejul primei lui candidaturi, nereușite. Avînd puține șanse să reușească fiindcă și celălalt candidat era un om simpatizat de toți, filozofii au hotărît să dea votul lor acestuia, renunțînd la Marmontel, care era propus de ei. Aflînd despre această hotărîre, grupul opus a socotit că s-a ivit o ocazie favorabilă ca să-i blameze pe filozofi și s-au înțeles, în secret, ca ei să-și voteze candidatul cu bile negre și apoi să atribuie această faptă filozofilor. Cînd s-a despuiat scrutinul, s-au găsit 4 bile negre și toți au rămas intrigați de faptă, cel mai scandalizat fiind însuși șeful grupului ce pusese la cale acest complot. Privindu-i pe filozofi a spus cu indignare că este o rușine ca o persoană așa de stimată de toți cum este „X" să capete patru bile negre. Filozofii au tăcut, lăsîndu-i pe toți să-și exprime indignarea și cînd toată lumea era pe deplin convinsă că aceasta era treaba filozofilor, s-a sculat Duclos și a spus, serios:

— N-am pus cu bila neagră, fiindcă, din fericire, am păstrat-o pe a mea, iat-o!

Imediat, fără ca să le lase timp să se dezmeticească, s-a ridicat și d'Alembert, adăugînd sarcastic:

---

[1] *Mémoires de Marmontel*, publiés par Maurice Tourneaux, Paris, 1891, tome I, II, III (Memoires d'un père pour servir a l'instruction de ses enfants), vol. II, pp. 210—213.

— Nici eu, iată şi bila mea. În acelaşi timp, ceilalţi doi au ridicat în sus şi bilele lor negre, pe care, la îndemnul lui Duclos, care bănuia ceva, le-au păstrat.

Văzîndu-se demascaţi, ceilalţi au crezut că se scuză arătînd că procedeul este contra legilor Academiei, de a păstra secretul alegerilor, dar d'Alembert le-a răspuns, fără cruţare: „Prima lege este aceea a apărării personale şi noi nu am avut decît acest mijloc ca să înlăturăm orice bănuială".

D'Alembert a fost ales membru al Academiei la vîrsta de 24 de ani, după ce fusese respins de trei ori. Chiar şi după alegerea lui la Academie el a continuat să locuiască în odăiţa lui de copil, de la mansardă, pe care o avea pusă la dispoziţie de soţii Rousseau, atunci cînd l-au adoptat. Nu a părăsit-o decît la vîrsta de 48 de ani, cînd s-a mutat de acolo alături de domnişoara de Lespinasse, pe care o cunoştea de 6 ani, şi aceasta numai în urma sfatului medicului ce l-a îngrijit de o boală gravă, recomandîndu-i să aibă mai mult spaţiu şi aer în jurul lui. În 1760, cu 5 ani mai înainte de a se muta, a scris: *Portretul lui d'Alembert, făcut de el însuşi*, fiindcă pe vremea aceea erau la modă asemenea opere. Iată ce spune: „Domnul d'Alembert nu are în figura lui nimic remarcabil, nici în bine nici în rău, se pretinde că figura lui este de obicei ironică şi răutăcioasă, de fapt este izbit de tot ce-i ridicol şi are probabil talentul să-l sesizeze, de aceea, nu-i de mirare că impresia ce o primeşte i se zugrăveşte adesea pe faţă. Conversaţia lui este inegală, cînd serioasă, cînd veselă... Caracterul principal al spiritului său este sinceritatea şi dreptatea ... în studiul geometriei superioare are oarecare talent şi multă uşurinţă, ceea ce i-a atras, de timpuriu, o faimă destul de mare. Această uşurinţă i-a lăsat timp să se ocupe, cu oarecare succes, şi de artele frumoase ... Consacrîndu-se studiului şi singurătăţii pînă la vîrsta de peste 25 de ani, n-a intrat în lume decît foarte tîrziu şi nu s-a simţit niciodată prea bine acolo... În realitate, el este foarte blînd, mult mai binevoitor decît pare şi foarte uşor de condus, cu condiţia să nu se observe această intenţie, căci, dragostea lui pentru independenţă ... l-a făcut să zică unuia dintre prieteni că este *sclavul libertăţii sale* ... După ce şi-a consumat primii ani în meditaţii şi lucru, el a văzut, ca şi înţeleptul, neantul cunoştinţelor omeneşti, a simţit că ele nu pot ocupa inima lui şi a strigat ca Amint din Tasse: „Am pierdut tot timpul pe care l-am petrecut, fără să iubesc" ...

a). J. Bertrand: *D'Alembert*, Paris, 1889.

b). J. Bertrand: *L'Académie des sciences et les académiciens de 1666 à 1793*, Paris, 1869.

101. *Lettres de M-lle de Lespinasse*, Garnier, Paris. Scrisorile sînt adresate contelui J.A.H. de Guibert, între anii 1773—1776. În memoriile lui

Marmontel (loc. cit. vol. II, p. 229) găsim : „La seratele care se ţineau la domnişoara de Lespinasse, cu excepţia cîtorva prieteni ai lui d'Alembert, cum erau cavalerul de Chatellux, abatele Morellet ... acest cerc era format din oameni cu preocupări diferite. Cînd erau împreună se simţeau în armonie, ca şi coardele unui instrument acordat de o mînă dibace. Nicăieri conversaţia nu era aşa de vie şi de bine condusă ca la ea ... D'Alembert era lîngă ea ca un copil simplu şi cuminte". Iată şi un al doilea portret, făcut de d'Alembert, după ce se mutase, de vreo 6 ani, în apartamentul ei : *Portretul domnişoarei de Lespinasse scris de d'Alembert, adresat ei însăşi, în 1771.* „Timpul, obişnuinţa care denaturează totul, care distruge părerile şi iluziile noastre, cum nimiceşte sau slăbeşte însăşi dragostea, nu are nici o putere asupra sentimentului pe care îl am pentru dumneavoastră şi pe care mi l-aţi inspirat de 17 ani ; acest sentiment se întăreşte, din ce în ce, prin cunoaşterea pe care o am despre calităţile amabile şi solide care formează caracterul dumneavoastră"...

162. Caritas de Condorcet (1743—1794) a arătat de tînăr un real talent matematic şi alese însuşiri sufleteşti. S-a distins ca filozof, matematician şi om politic. Printre scrierile sale iluministe se află şi o schiţă a unui tablou istoric al progresului spiritului uman. S-a interesat de problemele de analiză infinitezimală, de probabilităţi şi de aritmetica politică. În 1765 a publicat un volum, *Despre calculul integral*, în care se găsesc probleme cărora li se aplică metoda diferenţelor finite. Este un precursor al cercetărilor operaţionale şi a teoriei jocurilor. Fr. Arago : *Oeuvres*, Tome II : Caritas de Condorcet, p. 116.

163. J. E. Montucla : *Histoire des mathématiques*, Paris, 1802, vol. I, pg. 538, vol. IV, p. 642.

164. D. Diderot (1713—1789) : *Mémoire sur differents sujets de mathématiques*, Paris, 1748.

165. Joseph L. F. Bertrand (1822—1900) afirma, în legătură cu elogiile pronunţate de Condorcet, că Voltaire i-a scris lui Condorcet arătîndu-i că, deşi îi place aşa de mult, nu vede în ele decît un singur lucru supărător „acela că publicul ar dori să moară cîte un academician pe săptămînă numai ca să-l audă vorbind" (loc. cit. nr. 160 a, p. 224).

166. În romanul lui Alexandre Dumas, *Joseph Balsamo*, se descrie modul în care Ludovic al XV-lea îşi savura cafeaua : „Regele, cu atenţia adîncă ce i-o dăduse obişnuinţa, îşi calcula zahărul, măsura cafeaua (moca în clocot) şi vărsînd încet rachiul (vermeil) ca alcoolul să plutească, lua un rulou de hîrtie, îl aprindea la luminare şi cu el dădea

foc alcoolului înfierbîntat. După cinci minute, el savura cafeaua cu toată voluptatea unui gastronom desăvîrșit".

167. Nicolaus Cusanus (1401—1464) este primul dintre matematicienii europeni care a încercat să introducă sistemul heliocentric. Ca astronom și fizician, el a arătat cît de necesară este introducerea metodei experimentale în studiul științific al naturii și chiar al matematicilor", fiindcă nu este posibilă cunoașterea numai pe baza raționamentelor scolastice". În problema cuadraturii cercului, deși puține îi erau izvoarele de informații, el a ajuns la rezultate interesante care au fost surse de inspirație pentru matematicienii de mai tîrziu. Între 1445 și 1450, el a scris mai multe lucrări despre aflarea lungimii arcului de cerc, considerînd cercul ca pe un poligon cu un număr infinit de mare de laturi. Căutînd să stabilească raportul dintre lungimea cercului și diametrul său, Cusanus a imaginat o metodă care i-a permis să găsească o formulă ce exprimă, în mod aproximativ, lungimea arcului de cerc θ, prin formula:

$$\theta \simeq \frac{3 \sin \theta}{2 + \cos \theta} = \theta \left(1 - \frac{\theta^5}{180} + \cdots\right).$$

Formula stabilește o limită superioară a lungimii arcului de cerc, mai precisă decît aceea a lui Arhimede ($\operatorname{tg} \theta$), și, plecînd de la ea, Huygens a găsit corespondentul ei geometric, prin construcția indicată la nr. 141. De asemenea, Cusanus a stabilit o formulă care leagă valoarea razei r a cercului, a cărui lungime se consideră aproximativ egală cu a unui poligon dat cu n laturi, și anume:

$r = \frac{r_n + 2\rho_n}{3}$ unde r_n este raza cercului circumscris și ρ_n a cercului înscris poligonului cu n laturi. Această metodă este cunoscută azi sub numele de *metoda izoperimetrelor*. Insistînd asupra faptului că aria unui cerc *nu este exact egală* cu a unui poligon, el a găsit latura pătratului a cărui arie este, făcînd abstracție de o cantitate foarte mică, egală cu a cercului, aproximînd numărul π mai bine ca Arhimede, anume $\pi = 3{,}1423$ față de $\pi = 3{,}1428$ cît considera Arhimede limita superioară. Încîntat de rezultatul obținut și care nici nu a fost depășit timp de un secol, Cusanus se lăuda spunînd că nu se va putea stabili o altă valoare mai bună decît a lui!

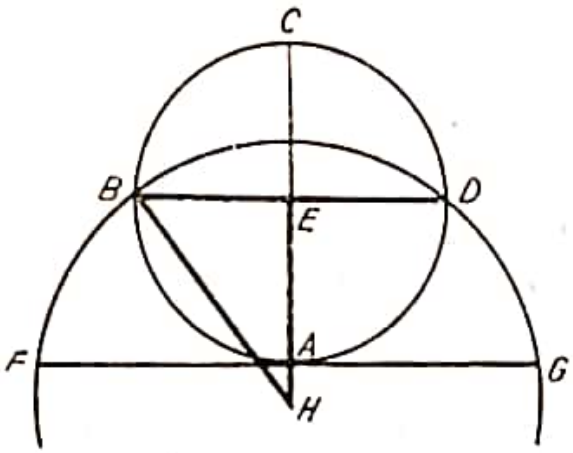
Gino Loria (loc. cit. nr. 85, vol. I, p. 430); *Figuri ilustre din Renaștere* (loc. cit. nr. 110, p. 64).

168. Afirmațiile îndrăznețe ale lui Cusanus au fost combătute de Regiomontanus (1436—1476) în lucrarea *De quadratura circuli contra card. Cusanus*. Ea a apărut chiar în anul cînd acesta a murit, așa că

nu a putut lua cunoștință despre critica lui Regiomontanus. A fost unul dintre astronomii și matematicienii de seamă din acel veac iar cartea lui, *De triangulis*, apărută tot în 1464, a fost cea mai sistematică trigonometrie cunoscută pe atunci.

160. Leonardo da Vinci (1452—1519) a avut un rol important în cultura umanistă și în sprijinirea filozofiei materialiste din epoca Renașterii. A fost un admirator și un bun cunoscător al operei lui Cusanus. D. E. Smith scrie: „Leonardo da Vinci ar fi citat ca unul dintre matematicienii de frunte dacă remarcabilele lui talente în celelalte direcții nu i-ar fi întunecat-o pe aceea de matematician" (loc. cit. nr. 85, vol. I, p. 294).
A. Favaro: *Arhimede e Leonardo da Vinci*, Atti Istituto Veneto, vol. LXXI (2), 1912, p. 953.

Fig. 29



170. Iată o construcție propusă de Bovelles: În cercul E (fig. 29) se duc doi diametri perpendiculari BED și CEA. Raza EA se împarte în patru părți și se pune una dintre diviziuni pe prelungirea ei, din A până în H. Apoi, din H ca centru, cu o deschidere de compas HB, se descrie un arc de cerc care taie în F și G tangenta dusă din A: „Spun, deci, că segmentul AG va fi egal cu a patra parte a cercului și, la fel, de cealaltă parte, segmentul AF" (Montucla, loc. cit. nr. 163. vol. IV, p. 622 și W. Bousse-Ball, *Récreations mathématiques*, vol. II, Paris, 1920, p. 311).

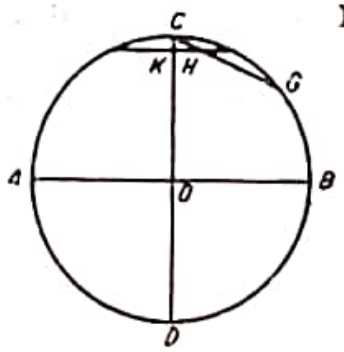
171. Iată titlul acestei traduceri: *La géométrie composé par le noble philosophe, maître Charles de Bovelles*, Paris, 1542 (loc. cit. nr. 163, vol. IV, p. 622).

172. Construcția lui Fineus este următoarea: fie două diametre perpendiculare, AB și CD (fig. 30). Se unește C cu mijlocul arcului CB și se împarte segmentul CG în medie și extremă rație, GH fiind segmentul cel mai mare. Prin H se duce o paralelă la AB care întîlnește pe CD

în K. Lungimea OK este jumătate din latura pătratului echivalent cu cercul. Dacă se fac calculele rezultă $\pi > 3{,}4$ (loc. cit., Rousse-Ball nr. 170, p. 311).

173. Piedro Nunes (1492—1577), cunoscut sub numele latin Nonius, a fost un matematician portughez însemnat. S-a ocupat de algebră, aritmetică, geometrie și astronomie. A inventat și un instrument pentru citirea unghiurilor mici, numit și azi *Nonius*, deosebit de acela ce poartă numele lui *Vernier*.

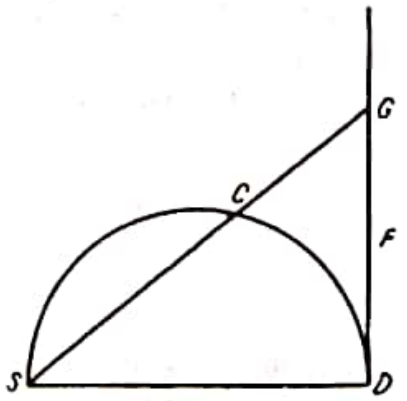
Fig. 30



174. Joannes Buteo (1492—1572), a scris despre geometrie și aritmetică. A combătut cuadratura lui Fineus în cartea *De quadratura circuli, libri II*, publicată la Lyon, în 1559. (Bibliot. Math.: XXI (3), 1911, p. 240).

175. Van der Eycke se bazează pe următoarea teoremă: „Dacă din extremitatea D a diametrului DS (fig. 31) se duce o tangentă DF și din cealaltă extremitate S se duce o linie dreaptă SCG care taie cercul și tangenta în așa fel ca partea DG tăiată pe tangentă să fie egală cu SC, această parte înscrisă SC va fi egală cu a patra parte a cercului". În felul acesta, van der Eycke găsește $\pi = \left(\frac{39}{22}\right)^2$ (loc. cit., Rousse-Ball, nr. 170, p. 312).

Fig. 31



176. Cînd ducele de Angoulême a fost numit șeful marinei, s-a constatat că de-abia știa să socotească. Imediat a fost chemat cel mai celebru geometru al Franței ca să-i facă educația matematică. Dar totul era în

zadar, căci acesta nu înţelegea nimic din cele mai elementare teoreme. El asculta cu o politeţă desăvîrşită, dar clătina mereu din cap cu un aer de îndoială. Într-o zi, geometrul, după ce-şi epuizase toate argumentele fără ca să-şi poată convinge elevul, neştiind cum să mai procedeze, i-a spus, în disperare:

— Dar bine, domnule, vă dau cuvîntul meu de onoare că este aşa cum vă spun.

Atunci ducele s-a luminat dintr-o dată la faţă şi i-a răspuns, uşurat şi fericit:

— De ce nu mi-ai spus aşa de la început, domnule? De-acum înainte, nu-mi voi mai permite niciodată să mă îndoiesc! (A. Rebière: *Mathématiques et mathématiciens*, Paris, 1889, p. 142).

177. R. W. Emerson: *La conduite de la vie*, Paris, 1926, p. 135.

178. I. C. Hofmann: *Der englische Philosoph Hobbes als Mathematiker*, Zeitserift für Math. u. Math. Unterricht, vol. 32, p. 262.

179. P. A. Cataldi (1548—1626) a fost profesor de matematici la Florenţa, Perugia şi Bologna. A editat primele 6 cărţi ale lui Euclid şi a combătut cuadratura cercului propusă de Scaliger şi alţii.

180. Christian Longomontanus (1562—1647), a fost profesor la Universitatea din Copenhaga, din 1605, şi astronom, elev al lui Tycho Brahé. H. Zeuthen: *Geschichte der Mathematik in XVI und XVII jahrhund.*, Leipzig, 1903, p. 18.

181. Unul dintre cei ce a combătut cuadratura lui Longomontanus, a scris: „Să nu se supere acest nou ciclometru, dar în pretinsul tratat despre curbilinii trebuie să ai şi o judecată curbilinie ca să poţi admite atari absurdităţi“ (loc. cit. nr. 170, p. 312).

182. François Nicole (1683—1758) a fost un talent matematic precoce, cîştigînd renumele de matematician de la 19 ani, prin rectificarea (adică determinarea lungimii arcului) cicloidei.

183. Fr. Arago: *Oeuvres*: *Notices biographiques, Condorcet*, vol. II, 137

184. Avîntul luat, în cursul secolului al XVIII-lea, de operaţiile cu serii a avut, pe de o parte un efect negativ, prin introducerea seriilor numerice divergente, dar şi un efect pozitiv, căci tocmai aceste serii divergente au grăbit precizarea noţiunii de convergenţă a seriilor. În cursul de *Analiză*, publicat de A. L. Cauchy (1789—1857) în 1821, au fost stabilite, pentru prima oară, principiile teoriei seriilor infinite şi tot în această carte au fost arătate condiţiile în care aceste serii pot fi folosite în calcule, enunţînd criteriul general de convergenţă,

care poartă azi numele lui Cauchy. În privința *seriilor divergente*, el scria: „Am fost nevoit să admit diferite propoziții care vor părea, poate, puțin cam dure, ca de exemplu, aceea *că o serie divergentă nu are sumă*". Cinci ani mai tirziu, Abel s-a exprimat, după cum am văzut, cu și mai multă duritate. După ce considera că ele sînt o „invenție a diavolului" a mai adăugat: „E o rușine îndrăzneala de a baza pe ele cea mai neinsemnată demonstrație, fiindcă prin ele se poate broda tot ce vrei și astfel au fost posibile atitea înfrîngeri". Și cu toate acestea, *seriile divergente* nu au fost eliminate din cercetări. Din contra, ele apar foarte des în probleme de tehnică și mai ales de astronomie. De pildă, turnul Eiffel are la baza construcției lui o serie divergentă. E vorba de acele serii divergente care au termenii descrescători și teoria lor a fost stabilită mai întîi de d'Alembert, iar apoi completată de alți matematicieni.

185. Prima lucrare a lui W. Shanks a apărut în vol. XXI din *Proceeding of the Royal Society of London*, p. 319. Stabilindu-se însă că 3 zecimale au fost greșite, valoarea corectă a fost dată în volumul următor, din același an, 1873, p. 45. Formula pe care a folosit-o acest harnic calculator a fost aceea găsită de Machin:

$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$, din care s-a dedus seria arătată la nr. 154 (Rousse-Ball, loc. cit. nr. 170, vol. II, p. 205).

Am mai putea adăuga aici că, pe lîngă această serie și acelea descoperite de Euler, s-au stabilit alte numeroase serii și mai repede convergente. De pildă, Stirling, apoi T. Simpson și W. Rutherford au găsit seria:

$\frac{\pi}{4} = 4\ \operatorname{arctg}\frac{5}{70} - \operatorname{arctg}\frac{1}{70} + \operatorname{arctg}\frac{1}{99}$. De asemenea, Z. Dase a folosit în calculele sale formula stabilită de L. K. Schulz:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

186. În revista *Chiffres*, vol. I, Paris, 1958, p. 17, Fr. Genuys a arătat că folosind tot formula lui John Machin, a calculat primele 10 000 de zecimale ale numărului π. Stabilirea primelor 3 000 de zecimale a durat 10 minute iar pentru rest timpul creștea proporțional cu numărul cifrelor stabilite.

187. Folosirea mașinilor electronice de calcul, pentru găsirea zecimalelor numărului π a început din 1949, Atunci a fost programată recalcularea zecimalelor lui Shanks și continuarea lor pînă la 2 000, la calculatorul

ENIAC. Cu această ocazie, s-a constatat că zecimala a 505-a era greșită. Cele 2 000 de zecimale au fost stabilite în 70 de ore. În anul 1954, ordinatorul NORC a fost programat să determine 3 000 de zecimale. Calculele au fost de data aceasta efectuate în 12 minute. Trecînd peste alte calcule ce s-au mai făcut după aceea, amintim numai că, în 1961, au fost calculate 20 000 de zecimale ale lui π, în 45 de minute. Tot în acest an, Daniel Shanks și Wrench, au calculat 100 000 de zecimale în 9 ore, apoi în 1966 au fost calculate 250 000 zecimale și în 1967, 500 000 de zecimale. Prima sută de mii a fost stabilită la New York, iar ultimele două determinări au fost făcute la Paris.

188. În cartea lui G. W. Kraft, *Institutiones geometria sublimioris*, apărută la Tubingen în 1753 era anunțat că împăratul Carol al V-lea a promis 100 000 de taleri aceluia care va pătrunde arcanul (secretul) cuadraturii cercului. (G. Enestrőm: Bibl. Math. XII (3), p. 268).

189. Cartea are titlul: *Esseu fizico-geometric* expus cenzurii publicului și mai ales fizicienilor-geometri profesînd în universități, colegii și academii, care sînt rugați și invitați să-l combată și să dea răspunsul prin gazetele literare. Cu o scrisoare de invitație specială pentru d'Alembert, ca să-l combată dacă este cazul! „Virtus omni obice major", Paris, 1778.
Pretinsa rezolvare a cuadraturii se baza pe următoarea teoremă — *care nu era adevărată* — „Dacă dintr-o extremitate a arcului unui sector de cerc se duce o dreaptă care împarte acest sector în două părți echivalente, dreapta trece prin centrul de greutate al sectorului".

190. În anul 1877, ziarul *l'Indépendance belge* publica anunțul unui cuadraturist care pretindea că adevăratul raport dintre cerc și pătratul înscris este $\frac{10}{9}$ și dacă nici un matematician din Europa sau America nu-i va combate demonstrația, va insista asupra drepturilor sale, cerînd ca demonstrația să-i fie recunoscută, în mod public, ca adevărată!

191. Ferdinand Lindemann (1852—1939) și-a încheiat cariera ca profesor la Universitatea din München. În amintirea descoperirii sale, în legătură cu transcendența numărului π, pe sala din fața Seminarului matematic al acestei universități se află bustul lui Lindemann, într-un medalion, iar sub numele lui este desenat un cerc întretăiat de un pătrat de arie egală, în interior fiind scrisă litera π.
C. Caratheodory: *F. Lindemann, Sitzung Berichte*, Math. Nath. Wiss. Bay. Acad., München, 1940, p. 61.
H. Tietze: loc. cit. nr. 141, p. 105.

102. Această lucrare se află publicată în următoarele reviste de matematică:

a) Sitzung-Berichte der Berliner Akad., 1882, p. 670;

b). C. R. Acad., Paris, T. 95, 1882, p. 72;

c). Math. Ann., Bd. 20, 1882, p. 213.

103. Printre *numerele fracționare*, numerele zecimale (fracții cu numitorul zece) sînt cele mai des folosite în practică, din cauză că, datorită sistemului nostru de numerație, ele se notează foarte simplu. *Numerele fracționare* au o proprietate importantă, aceea de a forma un *continuu geometric*. Iată ce înseamnă aceasta: Să presupunem că am ales un segment de lungime unu, fie de exemplu segmentul marcat la extremitățile lui prin numerele 1 și 2. Între aceste *două numere întregi consecutive*, există 9 numere zecimale ce au o singură cifră după virgulă: 1,1; 1,2; 1,3; ... 1,9, pe care le putem însemna pe segment prin niște puncte, în dreptul cărora vom nota abscisele respective. Considerăm acum segmentul cuprins între 1 și 1,1 sau acela cuprins între 1,1 și 1,2 ș.a.m.d. Fiecare dintre aceste segmente se poate împărți din nou în zece părți, prin punctele de diviziune ale căror abscise se notează prin numărul 1 urmat de două zecimale semnificative: 1,11; 1,12; 1,13; ... 1,19 și tot așa 1,91; 1,92; ... Așadar, între întregii 1 și 2 există 99 de numere fracționare zecimale cu cîte două cifre după virgulă. Urmînd același raționament găsim 999 de numere cu 3 zecimale etc. De aici tragem concluzia că, dacă vrem să trecem de la un număr zecimal la altul din vecinătatea lui, trebuie să trecem *printr-o infinitate de alte numere zecimale* (sau în general fracționare) cuprinse între acestea două. Or, aceste numere erau abscisele unor puncte de pe segmentul considerat, așadar, *între două puncte oricît de apropiate de pe un segment se găsesc o infinitate de alte puncte*, fiecare corespunzînd unui anumit număr fracționar, de unde și numele de *continuu geometric*. Dar tot între 1 și 2, sau oricare alt segment de aceeași lungime, nu se află numai infinitatea numerelor fracționare, ci și *o altă infinitate de numere ce nu se mai pot exprima printr-un număr fracționar*, de pildă $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc. Acestea sînt numerele ce corespund segmentelor *incomensurabile* cu o unitate de măsură.

104. Demonstrația incomensurabilității dintre latura și diagonala unui pătrat se află în *Elementele* lui Euclid, anume: presupunem că $\frac{A}{a} = \sqrt{2}$, așadar contrar afirmației că $\sqrt{2}$ nu este un număr fracționar, A și a fiind două numere naturale și prime între ele. Ridicînd la pătrat avem: $\frac{A^2}{a^2} = 2$ sau $A^2 = 2a^2$. Rezultă de aici că A este un număr par,

aşadar notăm $A = 2b$, unde b este un număr întreg. Înlocuind avem: $4b^2 = 2a^2$ sau, prin simplificare, $2b^2 = a^2$, deci şi a este un număr par, ceea ce contrazice ipoteza că A şi a erau prime între ele, adică fracţia era ireductibilă.

195. De pildă, în cazul lui $\sqrt{2}$ se defineşte şirul infinit al numerelor zecimale pozitive crescătoare, mai mici decît $\sqrt{2}$, anume: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 ... şi un alt şir de numere zecimale pozitive descrescătoare, dar mai mari decît $\sqrt{2}$ ca: 0,5; 0,42; 0,415; 0,4143 ... Aceste două şiruri infinite definesc numărul $\sqrt{2}$.

196. *Număr algebric real* este acela care verifică un polinom de gradul n: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ fiind numere întregi şi $a_0 \neq 0$. Dacă $a_0 = 1$, atunci rădăcinile polinomului se numesc *întregi algebrici*; cele reale sînt *întregi algebrici reali*. De pildă, $\sqrt{2}$ este un *întreg algebric real* fiind rădăcina ecuaţiei $x^2 = 2$. Rădăcina ecuaţiei $3x^2 = 2$ nu mai este un întreg algebric, ci numai un *număr algebric real*, anume $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Acesta se mai poate pune sub forma $\frac{\sqrt{6}}{3}$ de unde rezultă că *orice număr algebric real este cîtul dintre un întreg algebric real şi un număr natural.*

197. O ecuaţie de forma $\sin x - 1 = 0$ nu este algebrică iar rădăcina ei, $x = \frac{\pi}{2}$, nu este un număr iraţional algebric.

198. Aceasta înseamnă că nici o ecuaţie de forma $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, unde coeficienţii $a, b, \ldots, e$ sînt numere raţionale nu se poate rezolva folosindu-se o formulă în care să apară o serie de radicali în număr finit, aplicaţi unor operaţii aritmetice între coeficienţii ecuaţiei, aşa cum este cazul ecuaţiilor de gradul 2, 3 şi 4.

199. La lucrările lui Niels Abel se alătură acelea ale lui Evariste Galois (1811—1832), C. G. Jacobi (1804—1851), Charles Hermite, ş.a. toate legate de *numerele iraţionale algebrice* provenite din rădăcinile ecuaţiilor algebrice de grad egal sau mai mare decît cinci, adică a polinoamelor de forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (n \geqslant 5),$$

coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ fiind numere întregi oarecare. Rădăcinile acestor ecuaţii nu se mai pot exprima prin radicali. Dacă aceste rădăcini nu mai verifică nici o altă ecuaţie de aceeaşi formă, dar de un grad mai mic decît n, atunci ele se numesc *numere algebrice de gradul n*. Cu numerele algebrice de gradul n se pot efectua toate cele patru

operaţii aritmetice adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea, în afară de împărţirea cu zero, iar numerele noi ce se obţin astfel, rămîn tot numere algebrice de gradul n. Totalitatea acestor numere formează corpul numerelor algebrice de gradul n. În el sînt cuprinse toate numerele întregi, fracţionare, iraţionale, care se exprimă prin radicali şi numerele iraţionale ce nu se exprimă prin radicali.

200. Joseph Liouville (1800—1882), în lucrarea sa *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible a des irrationnelles algébriques* (Journal de Mathématique (1) 16,1851, p. 133) arată că există o mulţime infinită de numere transcendente de forma:

$$\frac{1}{n^{1!}} + \frac{1}{n^{2!}} + \frac{1}{n^{3!}} + \cdots + \frac{1}{n^{n!}} + \cdots$$

unde n este un număr real > 1. Mai tirziu, G. Cantor a arătat că mulţimea infinită a numerelor transcendente este mai mare decît cea a numerelor algebrice.

Termenul *transcendent* a apărut, pentru prima oară, în matematici, întrebuinţat de Leibniz, în 1679, ca să denumească astfel *mărimile* din *domeniul nealgebric*, adică acele mărimi care, prin natura lor fie că depăşesc orice limită finită, fie că li se aplică un număr nelimitat de operaţii. Dar, deşi s-a ocupat de variabile ridicate la o putere infinită, care să întrecă un grad n al unei ecuaţii algebrice, el *nu a dovedit existenţa unor asemenea mărimi transcendente*. De asemenea şi Newton a remarcat, în 1687, că există două categorii de curbe: acelea în care numărul punctelor de intersecţie cu o dreaptă este finit şi curbe ce au un număr infinit de puncte de intersecţie cu o dreaptă. Problema numerelor transcendente a fost pusă şi de Wallis, Jean Barnoulli, Euler ş. a., însă Liouville este acela care a dat o definiţie precisă a numerelor transcenente, *a dovedit existenţa lor şi modul cum se pot obţine efectiv*[1].

---

[1] Fiind dat un număr, construit după o anumită lege, e greu de spus dacă el este algebric sau transcendent. De exemplu, numărul N definit de seria

$$N = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots + \frac{1}{10^{n!}} + \cdots$$

este algebric sau transcendent? Pentru $n = 10$ se poate dovedi că are o valoare mai mică decît 0,12, iar Liouville a stabilit că este un număr *transcendent*. Din contra, numărul $x = \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{10^{11}} + \ldots$ este *algebric*, fiind rădăcina ecuaţiei $99\,900\,x - 1 = 0$.

201. Johann Heinrich Lambert (1728—1777) a făcut numeroase descoperiri în domeniul analizei matematice. În 1761 a comunicat Academiei din Berlin demonstrația iraționalității numărului π. Ea se află și în cartea sa *Vorläufige Kenntnisse für die so die Quadratur des Circus suchen*, din 1770. Iată cum a stabilit Lambert iraționalitatea numărului π.

Fiind stabilit că $\operatorname{tg} \frac{1}{n}$, pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$, se exprimă printr-o fracție continuă infinită, ceea ce dovedește că este un număr irațional, Lambert a dovedit și proprietatea inversă a tangentei, anume că, la o valoare rațională a ei, corespunde o valoare irațională a arcului. Or, fiindcă $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, rezultă că $\frac{\pi}{4}$ este un număr irațional. T. Lagny, deși stabilise această proprietate, nu a tras concluzia cu privire la natura numărului π.

Felix Klein: *Vorträge über ausgewählte Frage*, Leipzig, 1895, p. 43.

202. Charles Hermite (1822—1901) a fost unul dintre cei mai remarcabili profesori de la Sorbona. El s-a ocupat, mai ales, de teoria numerelor și a formelor algebrice. Studiul fracțiilor continue algebrice l-a condus, în 1873, să *descopere transcendența numărului e*. Lucrarea are ca titlu: *Sur la fonction exponentielle* și e publicată în Comptes rendus T. LXXVII, 1873, p. 18. Puțin timp după această descoperire, el îi scria matematicianului K. W. Borchard (1817—1880): „Nu voi risca să încerc a demonstra transcendența numărului π. Dacă vor face-o alții, nimeni nu va mai fi fericit decît mine de reușita lor, dar crede-mă, dragă prietene, că aceasta nu va fi tocmai ușor". Tot în 1873, Hermite a publicat și o nouă demonstrație a iraționalității numerelor π și π^2, în Journ. Math., v. 76, 1873, p. 342.

203. G. Carlo, conte de Fagano (1682—1766) a descoperit formula următoare: $\pi = 2i \log \frac{1-i}{1+i}$, prin care a anticipat formula de legătură dintre numerele e, π și i, pe care a stabilit-o Euler.

Deși Neper a dat publicității logaritmii descoperiți de el, din 1614, abia după ce a fost stabilită definiția logaritmului unui număr, de către Euler, *ca exponentul la care trebuie ridicat numărul e*, operațiile cu logaritmi au fost privite de matematicieni ca operații algebrice. Cauchy este acela care a arătat că era necesar să se stabilească o notație precisă a logaritmilor neperieni care să-i deosebească de cei zecimali. Într-o scrisoare din 1731, adresată de Euler matematicianului Goldbach, găsim: „Notez cu e numărul al cărui logaritm hiperbolic (neperian) este 1. Această notație s-ar putea să-i fi fost inspirată lui Euler de faptul că nota prin *a* baza unui sistem oarecare de logaritmi

și atunci, pentru cei neperieni, a ales *a doua vocală după a, adică e.* Iată o regulă mnemonică ce dă primele 12 zecimale ale lui e:

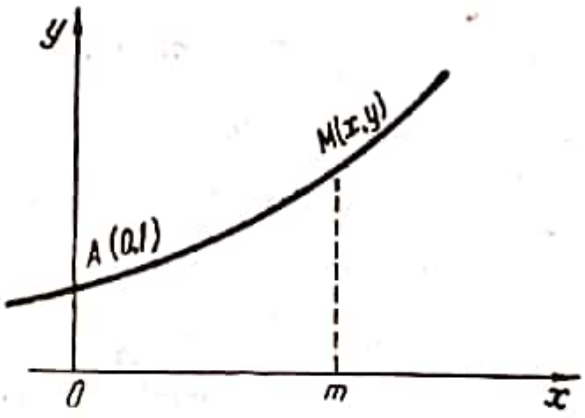
Pe numărul e
Savantul îl stimează
E-academic și formează
Bază pentru logaritmi.

Înlocuind fiecare cuvînt prin numărul literelor sale se obține

$$e = 2{,}718281828469.$$

(*Gazeta matematică*, vol. XIII, 1936, p. 197.)

204. În demonstrația sa, Lindemann a folosit identitatea lui Euler $e^{i\pi} = -1$, precum și proprietatea funcției exponențiale $y = e^x$ de a nu fi verificată de nici o pereche de numere algebrice, cu excepția perechii (0,1). Graficul acestei funcții (fig. 32) arată punctul A de coordonate (0,1), de intersecție a curbei cu axa ordonatei. Rezultă, de aici, că toate celelalte puncte ale curbei au, fie ordonata, fie abscisa, fie ambele coordonate exprimate prin numere transcendente. Aceasta rezultă și din teorema pe care a demonstrat-o Lindemann în lucrarea sa, anume că *este imposibil să existe o ecuație de forma :*
$a + e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots e^{x_n} = 0$, *unde* a *este un număr întreg iar* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *numere algebrice.*
Așa fiind, rezultă din identitatea lui Euler, $e^{i\pi} = -1$, că, dacă ordonata punctului M este un număr rațional (fig. 32), atunci abscisa lui, adică π, este un număr transcendent.
F. Klein : *Conférences sur les mahtématiques*, Paris, 1898, p. 57.



205. În *Gazeta matematică*, vol. XIII, 1936, p. 197, se mai află și următoarea poezie, din care se pot afla 25 de zecimale ale numărului π, intitulată „Soluție pentru firi romantice" și e compusă de Al. I. Stoenescu :

„Sus e luna,
O zeiță fermecată
Ca nebună

Peste ape trece supărată.
Cîntecele toamnei parfumate
Mor de dor
Legănate uşor
Visuri de iubire
Spre cer zbor.

În *Récreations mathématiques* de Rousse-Ball, vol. II, p. 208, găsim următoarele versuri care conduc pînă la a 30-a zecimală a lui π:

„Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages,
Immortel Arhimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages".

În *Manualul de geometrie* pentru clasele VI—X de Kiselev, Moscova, 1956, I, p. 159, se află următoarele versuri în limba rusă, care dau zece zecimale ale lui π:

„Кто и шутя и скоро пожелаетъ
„Пи узнать число ужъ знаетъ"

De asemenea, în cartea lui Tietze (loc. cit. nr. 141, p. 118) se găsesc menţionate două poezii, una în limba germană şi cealaltă în limba engleză:

a) *„Wie, o dies*
Macht ernstlich so viele Müh !
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein
Wie so zum Beispiel dis dürfte zu merken sein"

care exprima numărul π cu 28 de zecimale şi

b) *„Now I know a spell unfailing*
An artful charm for tasks availing
Intricate results entailing
Not in too exacting mood"

cuprinzînd 19 zecimale ale lui π.

CUPRINS

	Introducere	7
I	ÎN NEGURA VREMII	11
II	RĂSARE „RA" LUMINÎND EGIPTUL	16
III	DUPĂ UN MILENIU ŞI MAI BINE	27
IV	ÎN GRĂDINA LUI APOLLON LYKEION	37
V	SFĂRÎMAREA FORMEI	56
VI	DIBUIRI PRIN CEAŢĂ	68
VII	ÎN ESTUL ÎNDEPĂRTAT AL ASIEI	80
VIII	ÎN NOAPTEA ÎNSTELATĂ	87
IX	MOLIMA CUADRATURII CERCULUI	97
X	DOI NEFERICIŢI CAMPIONI AI CUADRATURII CERCULUI	111
XI	DIN NOU PRINTRE CUADRATURIŞTI	129
XII	ENCICLOPEDIŞTII SE AMUZĂ	142
XIII	ACADEMIA DE ŞTIINŢE IA MĂSURI DRASTICE	167
XIV	ÎN SFÎRŞIT, S-A DESCOPERIT ADEVĂRATA IDENTITATE A NUMĂRULUI π	173
XV	ZIUA CARE ÎNCEPE	192
	Note	197

„... Autoarea a ştiut, cu un deosebit talent literar şi cu o adîncă cunoaştere a subiectului, să facă să retrăiască, în faţa noastră, lupta pe care omenirea, prin reprezentanţii ei cei mai aleşi a dus-o pentru cercetarea adevărului, solidaritatea pe care cercetarea ştiinţifică a creat-o printre oameni peste barierele de rasă sau de credinţe religioase..."

MIRON NICOLESCU

„... Cartea va fi citită cu cea mai mare desfătare de toţi cei ce iubesc şi cultivă matematicile şi este de natură să atragă spre această ştiinţă mulţi tineri entuziaşti..."

Acad. CAIUS IACOB

5

LEI 6,75